Pengintegralan dan Penurunan Deret Fourier

Integral Deret Fourier

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos nt + b_n \sin nt\right) \quad \text{untuk} \ -\pi \le t_1 < t \le \pi$$

$$\int_{t_1}^{t} f(t)dt = \int_{t_1}^{t} \frac{1}{2}a_0\, dt + \sum_{n=1}^{\infty}\int_{t_1}^{t}\left(a_n \cos nt + b_n \sin nt\right)dt$$

$$= \frac{1}{2}a_0(t - t_1) + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{b_n}{n}(\cos nt_1 - \cos nt) + \frac{a_n}{n}(\sin nt - \sin nt_1)\right]$$

Turunan Deret Fourier

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos nt + b_n \sin nt\right)$$

$$f'(t) = \sum_{n=1}^{\infty}(nb_n \cos nt - na_n \sin nt)$$

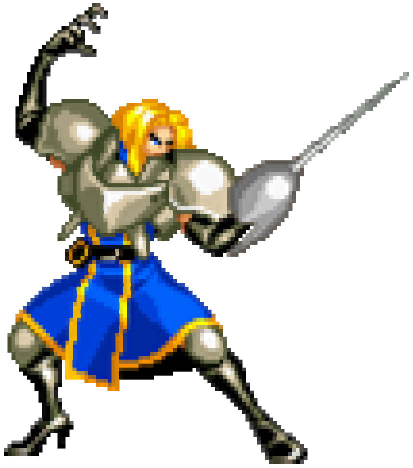
Teori Parseval

(***March Antoine Parseval ahli matematika Francis***)

Deret Fourier : $$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos nx + b_n \sin nx \right)$$

Ruas kiri dan kanan dikalikan dengan *f(x)* kemudian di integralkan dari $-\pi$ sampai π

Identitas Parseval $$\boxed{\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 \, dx = 2a_0^{\,2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n^{\,2} + b_n^{\,2} \right)}$$



$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \qquad n = 1, 2, \cdots$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx \qquad n = 1, 2, \cdots$$

Identitas Parseval

Untuk deret Fourier :
$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t\right)$$

Identitas Parseval :

Periode T
$$\frac{1}{T}\int_0^T (f(t))^2\,dt = \frac{1}{4}a_0^{\;2} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^{\;2} + b_n^{\;2}\right)$$

Periode T = 2L
$$\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} (f(t))^2\,dt = \frac{1}{2}a_0^{\;2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^{\;2} + b_n^{\;2}\right)$$

Deret Fourier Komplek
$$\frac{1}{T}\int_0^T (f(t))^2\,dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n c_n^* = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|c_n\right|^2$$

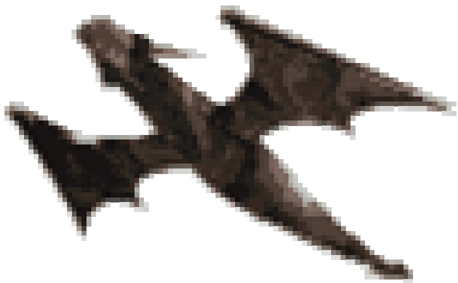
Daya rata-rata P_{av}

Daya rata – rata P_{av} dari sinyal periodik *f(t)* dengan periode *T* didefinisikan

$$P_{av} = \frac{1}{T}\int_0^T \left(f(t) \right)^2 dt$$

dengan teorema *Parseval*

$$P_{av} = \frac{1}{4}a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2 + b_n^2 \right)$$



Contoh :

Carilah Daya rata-rata pada tahanan 1Ω oleh sinyal tegangan dengan periode 2π diberikan oleh :

$$v(t) = \cos t - \frac{1}{3}\sin 2t + \frac{1}{2}\cos 3t$$

Penyelesaian :

$v(t)$ periodik dengan periode $T = 2\pi$

Koefisien deret Fourier : $a_1 = 1,\ a_3 = \frac{1}{2},\ b_2 = -\frac{1}{3}$

Daya rata – rata $P_{av} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left(v(t)\right)^2 dt$

Dengan teori Parseval didapatkan :

$$P_{av} = \frac{1}{2}\left(1^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2\right) = 0{,}68 \text{ W}$$

Fungsi Ortogonal.

- Dua fungsi $g_m(x)$ dan $g_n(x)$ dikatakan ortogonal dalam interval a ≤ t ≤ b jika

$$\boxed{(g_m, g_n) = \int_a^b g_m(x) g_n(x)\,dx = 0 \qquad m \neq n}$$

Akar kuadrat (g_m,g_m) yang tak negatif disebut norma (ukuran) dari $g_m(x)$ dan secara umum dinyatakan dengan $\|g_m\|$:

$$\boxed{\|g_m\| = \sqrt{(g_m, g_m)} = \sqrt{\int_a^b g_m^2(x)\,dx}}$$

Fungsi Ortogonal.

- Suatu himpunan ortogonal $g_1, g_2, \ldots$ pada selang $a \le t \le b$ yang fungsi-fungsinya mempunyai norma 1 memenuhi hubungan

$$(g_m, g_n) = \int_a^b g_m(x) g_n(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{untuk } m \neq n \quad m = 1, 2, \cdots \\ 1 & \text{untuk } m = n \quad n = 1, 2, \cdots \end{cases}$$

Himpunan semacam ini disebut ***himpunan ortonormal*** dari fungsi-fungsi pada selang $a \le t \le b$

Fungsi Ortogonal.

- Penulisan secara singkat $(g_m,g_n) = \delta_{mn}$ yang disebut ***delta Kronecker**** yang didefinisikan dengan :

$$\delta_{mn} = \begin{cases} 0 & \text{untuk } m \neq n \\ 1 & \text{untuk } m = n \end{cases} \qquad (m,n=1,\,2,\,\cdots)$$

Jadi dari suatu himpunan ortogonal dapat diperoleh suatu himpunan ortonormal dengan membagi setiap fungsi dengan normanya.

(*Leopold Kronecker ahli matematika Jerman)

Contoh :

Tunjukan fungsi $g_m(x) = \sin mx$, $m = 1, 2, \ldots$ membentuk suatu himpunan ortogonal pada selang $-\pi \le x \le \pi$.

Penyelesaian :

Untuk $m \neq n$ diperoleh :

$$(g_m, g_n) = \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx \, dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(m-n)x \, dx - \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(m+n)x \, dx = 0$$

Normanya :

$$\|g_m\| = \sqrt{(g_m, g_m)} = \sqrt{\int_a^b g_m^2(x) dx} = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 mx \, dx} = \sqrt{\pi} \qquad (m = 1, 2, \cdots)$$

Jadi himpunan ortonormalnya : $\left\{ \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \ \frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}}, \ \frac{\sin 3x}{\sqrt{\pi}}, \ \ldots \right\}$