Transformasi Fourier

Integral Fourier

$$f(t) = \int_0^{\infty} \left[A(\omega)\cos\omega t + B(\omega)\sin\omega t \right] d\omega$$

$$A(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\omega t \, dt$$

$$B(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin\omega t \, dt$$

Integral Fourier bentuk komplek

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

F(ω) disebut transformasi Fourier dari fungsi *f(t)*

Penulisan kosntanta $\dfrac{1}{2\pi}$ atau $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$ dalam Transformasi Fourier

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{j\omega t}\,d\omega, \qquad \text{dan} \qquad F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}\,dt$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}\,dt\right]e^{j\omega t}\,d\omega$$

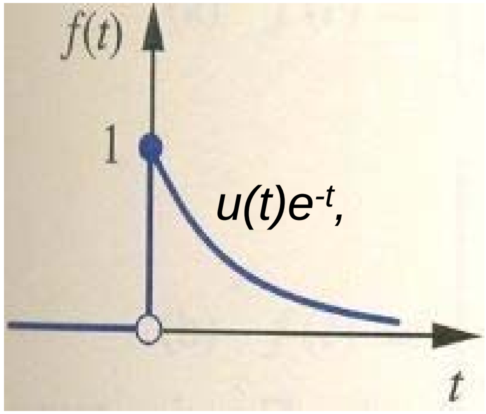
$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}\,dt\right]e^{j\omega t}\,d\omega$$

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}\,dt$$

Contoh :

Carilah transformasi Fourier dari fungsi *f(t)=u(t)e*$^{-t}$*,* *dengan u(t)* fungsi tangga satuan

Penyelesaian :



$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$= \int_{0}^{\infty} e^{-t} e^{-j\omega t} dt, \qquad f(t) = 0, \text{ untuk } t < 0$$

$$= \int_{0}^{\infty} e^{-(1+j\omega)t} dt$$

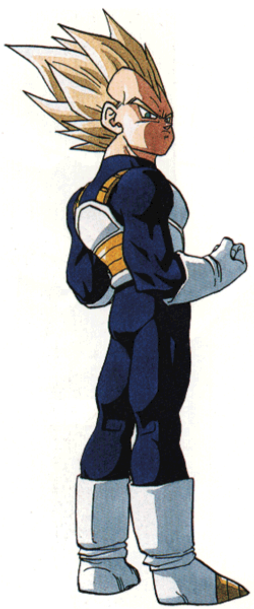
$$= \left[-\frac{e^{-(1+j\omega)t}}{1+j\omega} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{1+j\omega}, \qquad (e^{-(1+j\omega)t} = 0, \text{ untuk } t = \infty)$$

$$F(\omega) = \frac{1}{1+j\omega}$$

Contoh : Carilah Integral Fourier dari fungsi

$$f(t) = \begin{cases} 1 & -1 \le t \le 1 \\ 0 & |t| > 1 \end{cases}$$

Penyelesaian :



$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$= \int_{-1}^{1} 1 e^{-j\omega t} dt, \qquad f(t) = 0, \text{ untuk } t \text{ di luar } [-1, 1]$$

$$= \left[\frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega}\right]_{-1}^{1} = \frac{e^{-j\omega} - e^{j\omega}}{-j\omega} = \frac{e^{j\omega} - e^{-j\omega}}{j\omega}$$

Rumus *Euler* $\sin\theta = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}$

$$F(\omega) = \frac{e^{j\omega} - e^{-j\omega}}{j\omega} = \frac{2\sin\omega}{\omega},$$

Jadi $f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\sin\omega}{\omega} e^{j\omega t} d\omega$

Sifat-Sifat Transformasi Fourier

- **Linear (*linearity property*)**

Jika $F(\omega)$ dan $G(\omega)$ merupakan transformasi Foureir dari $f(t)$ dan $g(t)$ dan jika α dan β adalah konstanta, maka:

$$F\left\{\alpha\, f(t)+\beta\, g(t)\right\}=\alpha F\left\{f(t)\right\}+\beta F\left\{g(t)\right\}=\alpha F(\omega)+\beta\, G(\omega)$$

- **Teori Pergeseran Pertama (*frequency-shift property*)**

Jika $F(\omega)$ merupakan transformasi Fourier dari $f(t)$, maka:

$$F\left\{e^{jat} f(t)\right\}=F(\omega-a) \qquad a \text{ adalah konstanta}$$

Sifat-Sifat Transformasi Fourier

- **Teori Pergeseran kedua (*time-shift property*)**

Jika $F(\omega)$ merupakan transformasi Fourier dari $f(t)$, maka:

$$F\left\{f(t-\alpha)\right\} = e^{-j\alpha\,\omega}F(\omega) \qquad \alpha \text{ adalah konstanta}$$

- **Turunan (*time-differentiation property*)**

$$F\left\{\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right\} = (j\omega)^n F(\omega)$$

Sifat-Sifat Transformasi Fourier

- **Scaling**

$$F\{f(at)\} = \frac{1}{|a|}F\left(\frac{\omega}{a}\right) \qquad a \text{ adalah konstanta}$$

- **Duality**

Jika $F(\omega)$ merupakan transformasi Fourier dari $f(t)$, kemudian

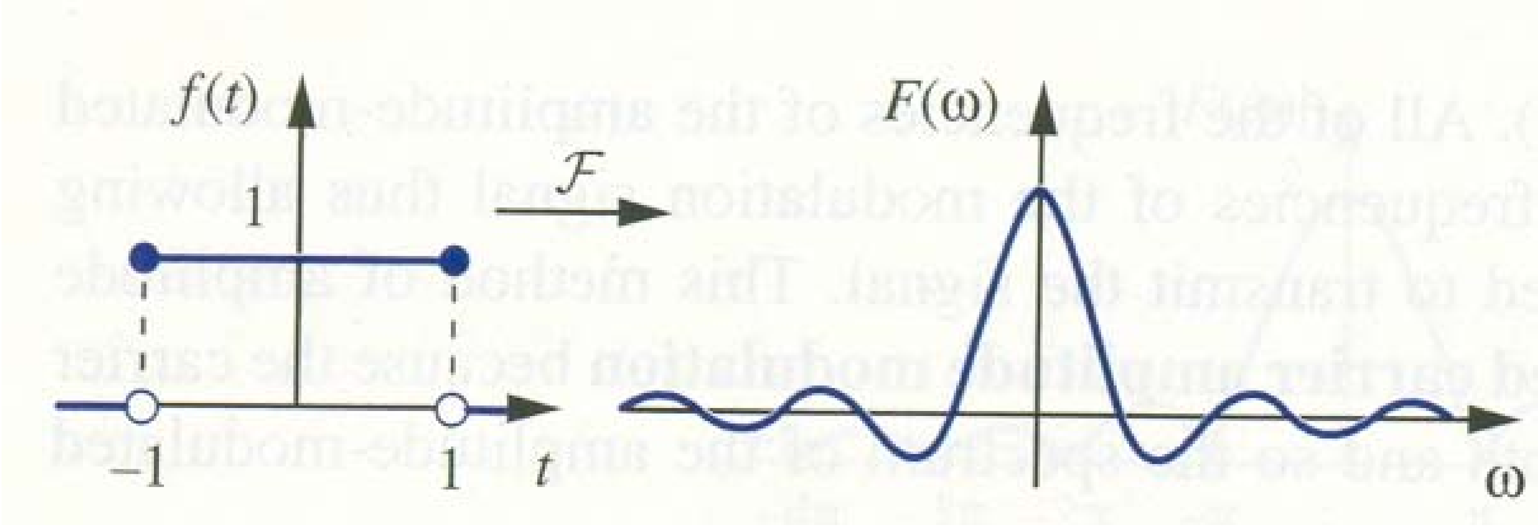
$f(-\omega)$ adalah $\frac{1}{2\pi}x$ (Transformasi Fourier dari $F(t)$) atau

$$F(t) = 2\pi\left(f(-\omega)\right)$$

Ilustrasi Duality

Transformasi Fourier dari fungsi

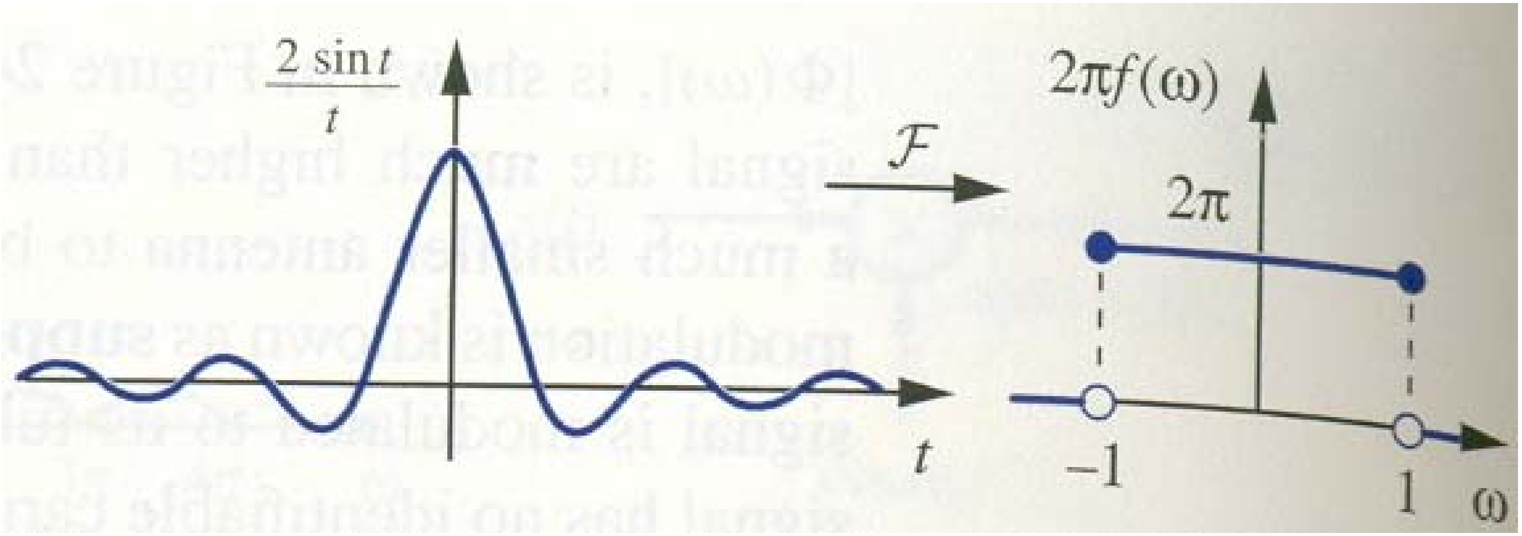
$$f(t) = \begin{cases} 1 & |t| \leq 1 \\ 0 & |t| > 1 \end{cases} \quad \text{adalah} \quad F(\omega) = \frac{2\sin\omega}{\omega}.$$



Ilustrasi Duality

$$F\left\{\frac{2\sin t}{t}\right\} = 2\pi\big(f(-\omega)\big) = 2\pi\big(f(\omega)\big)$$

f adalah fungsi genap



Spektrum

Penggambaran amplitudo dengan frekuensi dan phase dengan frekuensi disebut dengan spektrum. Fungsi periodik mempunyai spektrum garis atau diskrit

Contoh :

Transformasi Fourier dari fungsi

$$f(t) = \begin{cases} 1 & |t| \le 1 \\ 0 & |t| > 1 \end{cases} \quad \text{adalah} \quad F(\omega) = \frac{2\sin\omega}{\omega}.$$

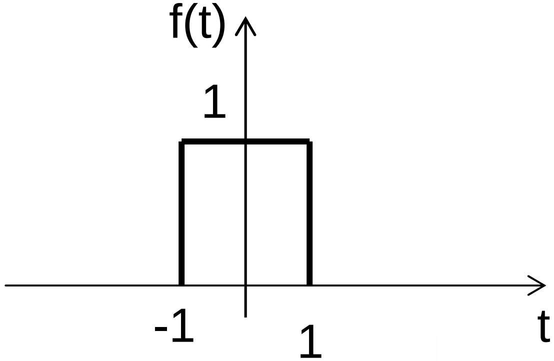
Gambarkan spektrum dari *f(t)*.

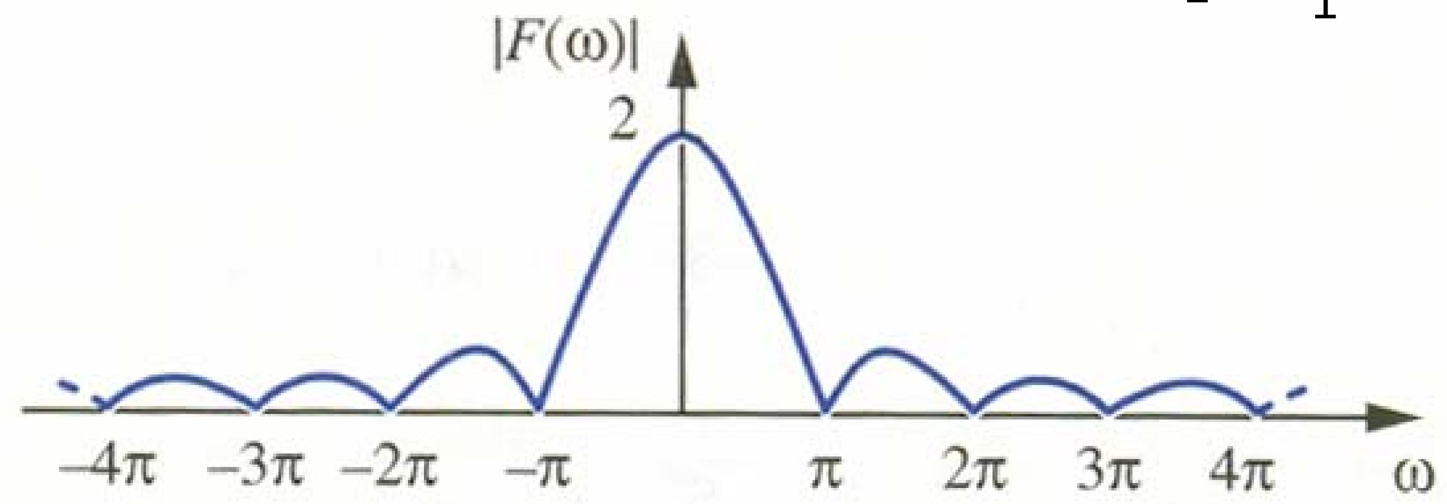
Catatan $\boxed{\lim_{\omega \to 0} \frac{\sin \omega}{\omega} = 1}$

- Penyelesaian :

  Pengambaran spektrum dari fungsi

$$f(t) = \begin{cases} 1 & |t| \le 1 \\ 0 & |t| > 1 \end{cases}$$





Transformasi Fourier dari Fungsi Khusus

- Transformasi Fourier dari δ(*t*-*a*)

$$F\delta(t-a)=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-a)e^{-j\omega t}dt$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\delta(t-a)dt=f(a)$$

$$f(t)=e^{-j\omega t}$$

$$F\{\delta(t-a)\}=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-j\omega t}\delta(t-a)dt=e^{-j\omega a}$$

Jika $a=0$, maka $F\{\delta(t)\}=1$