Konvolusi dan Teorema Konvolusi

Konvolusi dari $f(t)$ dan $g(t)$ adalah :

$$f * g = \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) g(t-\lambda) d\lambda$$

- Teorema Konvolusi

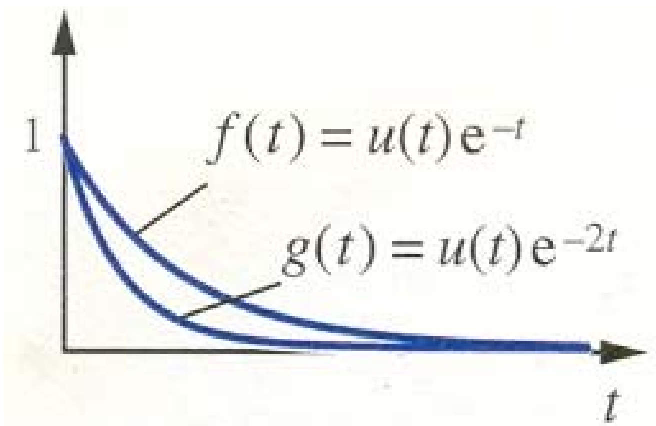
Jika $F\left\{f(t)\right\} = F(\omega)$ dan $F\left\{g(t)\right\} = G(\omega)$ maka :

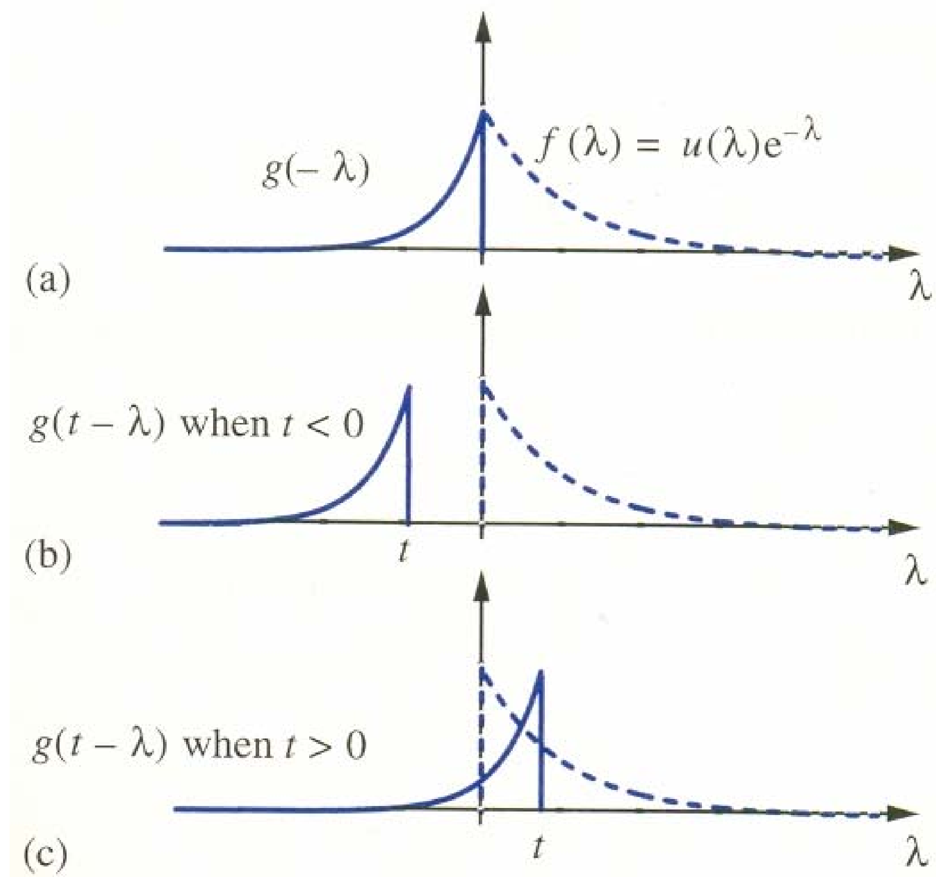
$$F\left\{f * g\right\} = F(\omega) G(\omega)$$

$$f * g = F^{-1}\left\{F(\omega) G(\omega)\right\}$$

Contoh : Hitunglah konvolusi dari $f * g$ *dengan* $f(t) = u(t)e^{-t}$ dan $g(t) = u(t)e^{-2t}$, dimana *u(t)* adalah fungsi tangga satuan, kemudian kaji dengan teorema konvolusi.

Penyelesaian :





Konvolusi dari $f(t)$ dan $g(t)$ adalah :

$$f * g = \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)g(t-\lambda)d\lambda$$

Untuk t < 0

Jika $t < 0$ tidak ada bagian yang overlaping, sehingga $f * g = 0$

Untuk $t \geq 0$

Jika $t \geq 0$ terjadi overlaping untuk nilai λ antara 0 dan t, yaitu $0 \leq \lambda \leq t$

$$f * g = \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) g(t-\lambda) d\lambda$$

$$= \int_0^t e^{-\lambda} e^{-2(t-\lambda)} d\lambda$$

$$= e^{2t} \int_0^t e^{\lambda} d\lambda = e^{2t} \left[e^{\lambda} \right]_0^t = e^{-t} - e^{-2t}$$

$$(f * g)(t) = \begin{cases} e^{-t} - e^{-2t} & \text{untuk } t \geq 0 \\ 0 & \text{untuk} < 0 \end{cases}$$

atau $\quad (f * g)(t) = u(t)\left(e^{-t} - e^{-2t}\right)$

Verifikasi teorema konvolusi $F\{f * g\} = F(\omega)G(\omega)$

Untuk $f(t) = u(t)e^{-t}, \quad F(\omega) = \dfrac{1}{1 + j\omega}$

dan $g(t) = u(t)e^{-2t}, \quad G(\omega) = \dfrac{1}{2 + j\omega}$:

$$F\{f * g\} = F(\omega)G(\omega) = \left(\frac{1}{1 + j\omega}\right)\left(\frac{1}{2 + j\omega}\right) = \frac{1}{(1 + j\omega)(2 + j\omega)}$$

$$F\{u(t)(e^{-t} - e^{-2t})\} = \left(\frac{1}{1 + j\omega}\right) - \left(\frac{1}{2 + j\omega}\right)$$ (Sifat linear transformasi Fourier)

$$= \frac{(2 + j\omega) - (1 + j\omega)}{(1 + j\omega)(2 + j\omega)} = \frac{1}{(1 + j\omega)(2 + j\omega)}$$

Jadi terbukti $F\{f * g\} = F(\omega)G(\omega)$

Korelasi dan Teorema Korelasi

Korelasi dari $f(t)$ dan $g(t)$ adalah :

$$f * g = \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) g(\lambda - t) d\lambda$$

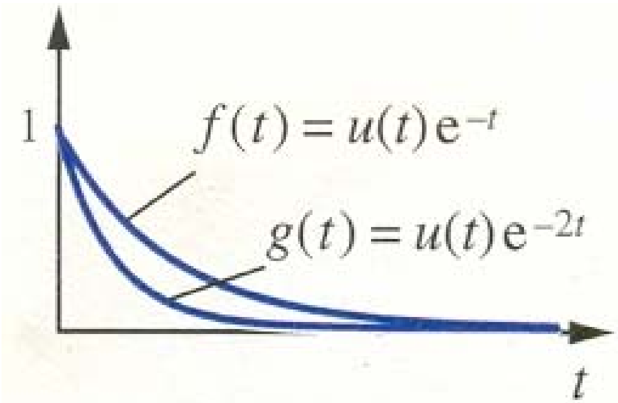
Teorema Korelasi

Jika $F\{ f(t) \}=F(\omega)$ dan $F\{ g(t) \}=G(\omega)$, maka

$F\{ f * g \}= F(\omega)\, G(-\omega)$,

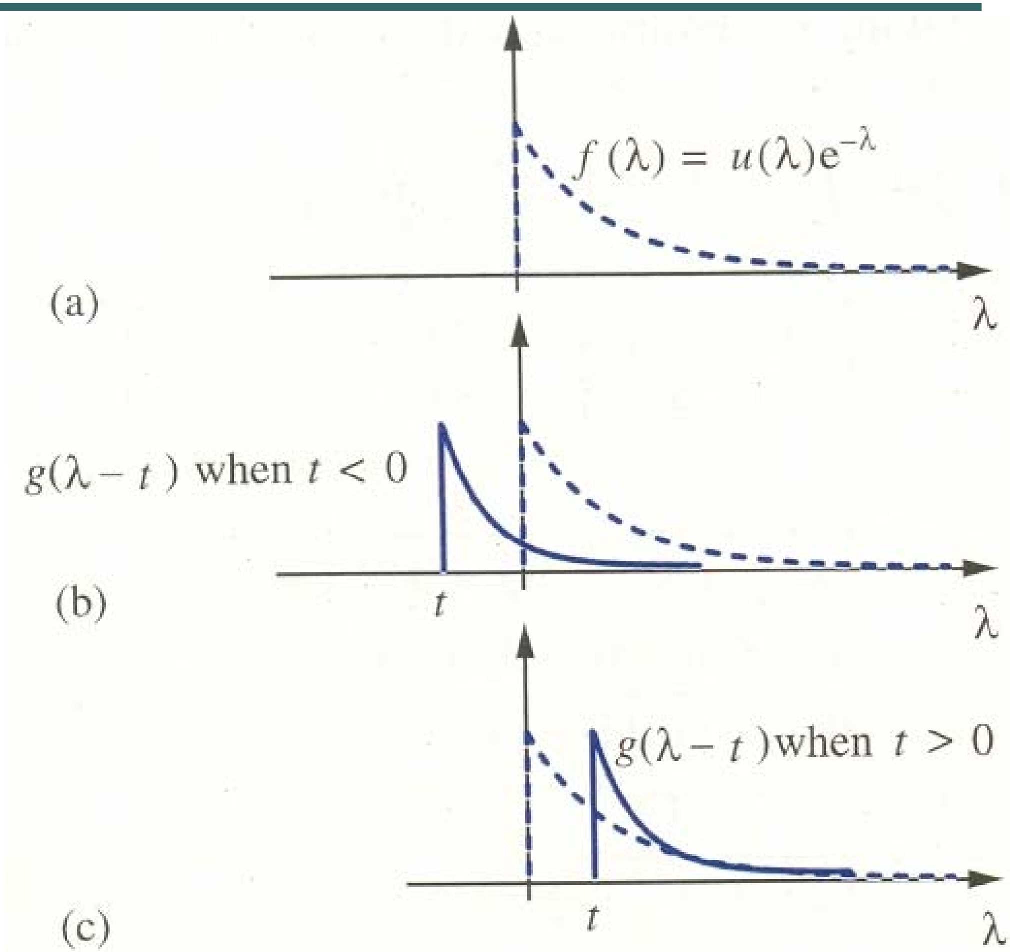
Contoh : Hitunglah korelasi dari $f(t) = u(t)e^{-t}$ dan $g(t) = u(t)e^{-2t}$, dimana *u(t)* adalah fungsi tangga satuan, kemudian kaji dengan teorema korelasi.

Penyelesaian :



Korelasi dari $f(t)$ dan $g(t)$ adalah :

$$f * g = \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) g(\lambda - t) d\lambda$$



Untuk t<0

Jika $t < 0$ grafik overlap untuk $0 \leq \lambda \leq \infty$

$$f * g = \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) g(\lambda - t) d\lambda$$

$$= \int_{0}^{\infty} e^{-\lambda} e^{-2(\lambda - t)} d\lambda$$

$$= e^{2t} \int_{0}^{\infty} e^{-3\lambda} d\lambda = e^{2t} \left[\frac{e^{-3\lambda}}{-3} \right]_{0}^{\infty} = \frac{1}{3} e^{2t}$$

Untuk $t \geqslant 0$
Jika $t \geqslant 0$ grafik overlap untuk $t \leq \lambda \leq \infty$

$$f * g = \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) g(\lambda - t) d\lambda$$

$$= \int_{t}^{\infty} e^{-\lambda} e^{-2(\lambda - t)} d\lambda$$

$$= e^{2t} \int_{0}^{\infty} e^{-3\lambda} d\lambda = e^{2t} \left[\frac{e^{-3\lambda}}{-3} \right]_{t}^{\infty} = \frac{1}{3} e^{-t}$$

$$\text{Jadi } (f * g)(t) = \begin{cases} \frac{1}{3} e^{2t} & \text{untuk } t < 0 \\ \frac{1}{3} e^{-t} & \text{untuk } t \geq 0 \end{cases}$$

Verifikasi teorema korelasi $F\{f*g\} = F(\omega)G(-\omega)$

Untuk $f(t) = u(t)e^{-t}$, $F(\omega) = \dfrac{1}{1+j\omega}$ dan $g(t) = u(t)e^{-2t}$, $G(\omega) = \dfrac{1}{2+j\omega}$:

$$f*g = F(\omega)G(-\omega) = \left(\frac{1}{1+j\omega}\right)\left(\frac{1}{2-j\omega}\right) = \frac{1}{(1+j\omega)(2-j\omega)}$$

$$F\{f*g\} = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{3} e^{2t} e^{-j\omega t}\,dt + \int_{0}^{\infty} \frac{1}{3} e^{-t} e^{-j\omega t}\,dt$$

$$= \left[\frac{e^{(2-j\omega)t}}{3(2-j\omega)}\right]_{-\infty}^{0} + \left[\frac{e^{(-1-j\omega)t}}{3(-1-j\omega)}\right]_{0}^{\infty} = \frac{1}{3(2-j\omega)} + \frac{1}{3(1+j\omega)}$$

$$= \frac{(3+3j\omega)+(6-3j\omega)}{9(2-j\omega)(1+j\omega)} = \frac{1}{(2-j\omega)(1+j\omega)}$$

Jadi terbukti $F\{f*g\} = F(\omega)G(-\omega)$