Persamaan Diferensial Parsial

Turunan Parsial $\boxed{z = f(x, y)}$

Jika x berubah – ubah sedangkan y tetap,

z adalah fungsi dari x dan turunannya terhadap x adalah

$$f_x(x, y) = \frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

disebut <u>turunan parsial pertama</u> dari $z = f(x, y)$ terhadap x

Jika y berubah – ubah sedangkan x tetap,

z adalah fungsi dari y dan turunannya terhadap y adalah

$$f_y(x, y) = \frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

disebut <u>turunan parsial pertama</u> dari $z = f(x, y)$ terhadap y

Contoh : $z = x^3 + y^3 - 2x^2 y$

Tentukan $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \; \dfrac{\partial z}{\partial x}$

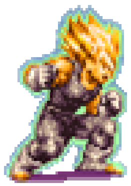
Penyelesaian :

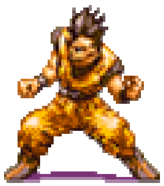
$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 + 0 - 4xy$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 0 + 3y^2 - 2x^2$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 4xy$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 3y^2 - 2x^2$$





Fungsi dengan lebih dari dua variabel Bebas

$$f(x,y,z) = xy + 2yz + 3zx$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y + 3z$$ y dan z = konstan

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x + 2z$$ x dan z = konstan

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 2y + 3x$$ x dan y = konstan

Turunan Parsial Tingkat Dua

- Suatu fungsi z = z(x,y)
- Turunan Tingkat Pertama dari z :

$$\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$$

Turunan Tingkat Dua dari z :

$$\frac{\partial z}{\partial x} \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}}$$

Contoh : $$z = 3x^2 + 4xy - 5y^2$$

Carilah turunan tingkat dua dari z

Penyelesaian :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 6x + 4y, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = 6, \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = 4$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 4x - 10y, \qquad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = 4, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = -10$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 4}$$

Persamaan Diferensial Parsial

- Persamaan yang mengandung turunan-turunan parsial dari suatu fungsi yang tidak diketahui yang diturunkan terhadap dua atau lebih variabel bebas .
- Orde persamaan diferensial parsial dapat ditentukan dari turunan tertinggi dari persamaan tersebut.

Contoh :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 2x - y$$ Orde 2

$$x^2 \frac{\partial^3 R}{\partial y^3} = y^3 \frac{\partial^3 R}{\partial x^3}$$ Orde 3

$$\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2 = 1$$ Orde 1

Persamaan Diferensial Parsial Linear

- Bentuk umum persamaan diferensial parsial linear orde dua dengan dua variabel bebas :

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D\frac{\partial u}{\partial x} + E\frac{\partial u}{\partial y} + Fu = G$$

A, B, C, D, E, F dan G tergantung dari x dan y bukan u

Persamaan diferensial parsial orde dua dengan dua variabel bebas x dan y tidak dapat dituliskan dalam bentuk umum seperti diatas disebut persamaan taklinear. Jika G=0 disebut persamaan homogen, sebaliknya jika G≠0 disebut tidak homogen

Contoh Persamaan Diferensial Parsial Linear Orde Dua yang penting

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$ Persamaan Gelombang Dimensi Satu

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$ Persamaan Aliran Panas Dimensi Satu

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$ Persamaan Laplace Dimensi Satu

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y)$$ Persamaan Poisson Dimensi Dua

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$ Persamaan Laplace Dimensi Tiga

Penyelesaian Persamaan Diferensial Parsial

- Contoh : $$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 2x - y$$

Penyelesaian Umum :

$$u = x^2 y - \tfrac{1}{2} x y^2 + F(x) + G(y)$$

Penyelesaian Khusus :

$$\text{Jika } F(x) = 2\sin x \text{ dan } G(y) = 3y^4 - 5, \text{ maka}$$

$$u = x^2 y - \tfrac{1}{2} x y^2 + 2\sin x + 3y^4 - 5,$$

Penyelesaian yang tidak dapat dicari dari penyelesaian umum dengan memberikan nilai tertentu pada sembarang fungsi disebut ***Penyelesaian Singular***

Metode Penyelesaian Persamaan Diferensial Parsial

- Prinsip Superposisi/Prinsip Kelinearan

  Jika u_1 dan u_2 adalah penyelesaian persamaan diferensial parsial homogen, kemudian :

  $$\boxed{u = c_1 u_1 + c_2 u_2}$$

  dengan c_1 dan c_2 adalah konstanta juga merupakan penyelesaiannya.

- Penyelesaian Umum persamaan diferensial parsial tidak homogen dapat dicari dengan menambahkan penyelesaian khusus persamaan tak homogen dengan penyelesaian umum persamaan homogen.

Contoh : Carilah penyelesaian $u(x, y)$ dari persamaan diferensial parsial $u_{xx} - u = 0$

Penyelesaian :

Dari persamaan $u_{xx} - u = 0$, tidak ada u diturunkan terhadap y sehingga persamaannya menjadi $u'' - u = 0$ didapatkan $u = Ae^{x} + Be^{-x}$ dengan A dan B konstanta. Barang kali A dan B merupakan fungsi dari y, maka penyelesaiannya $u(x, y) = A(y)e^{x} + B(y)e^{-x}$

Contoh : Carilah penyelesaian persamaan diferensial parsial $u_{xy} = -u_x$

Penyelesaian :

misal $u_x = p$, jadi $p_y = -p$,

$$\frac{p_y}{p} = -1, \quad \ln p = -y + c(x), \qquad p = c(x)e^{-y}$$

Diintegrasikan terhadap x maka didapat :

$$u(x,y) = f(x)e^{-y} + g(y) \qquad f(x) = \int c(x)\,dx$$

dan $f(x)$ dan $g(y)$ fungsi sembarang.

Contoh : Buktikan $u(x,t) = \sin(x+2t)$ merupakan penyelesaian persamaan gelombang dimensi satu $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

Penyelesaian :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \cos(x+2t) \qquad \frac{\partial u}{\partial t} = 2\sin(x+2t)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\sin(x+2t) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -4\sin(x+2t)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -4\sin(x+2t) = 4\left[-\sin(x+2t)\right] = 4\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Terbukti

Contoh : Buktikan $u(x,t)=e^{-8t}$ adalah penyelesaian persoalan syarat batas $\frac{\partial u}{\partial t}=2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ $\quad u(0,t)=u(\pi,t)=0, \quad u(x,0)=\sin 2x$

Penyelesaian :

$$u(x,t)=e^{-8t}\sin 2x$$

$$u(0,t)=e^{-8t}\sin 0=0$$

$$u(\pi,t)=e^{-8t}\sin \pi=0$$

$$u(x,0)=e^{0}\sin 2x=\sin 2x$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}=-8e^{-8t}\sin 2x \qquad \frac{\partial u}{\partial x}=2e^{-8t}\cos 2x \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-4e^{-8t}\sin 2x$$

Subtitusi ke persamaan diferensial:

$$-8e^{-8t}\sin 2x=2\left[-48e^{-8t}\sin 2x\right] \quad \text{terbukti} \quad \frac{\partial u}{\partial t}=2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$