# Matematika Teknik I

| | | |
|---|---|---|
| **Kode Mata Kuliah** | : | **TE 3218** |
| **SKS** | : | **3** |
| **Prasyarat** | : | **Kalkulus I, Kalkulus II, Aljabar Vektor & Kompleks** |
| **Tujuan** | : | Mahasiswa memahami permasalahan teknik dalam bentuk PD atau integral, serta dapat menerapkan metode penyelesaiannya |
| **Pokok Bahasan** | : | PD orde satu, PD separable, PD eksak, PD linier homogen dan non-homogen, sistem persamaan diferensial. Integral garis riil, teorema Green, integral permukaan, teorema Stokes, teorema Gauss, integral garis kompleks, deret Laurent, metode integral residu. |
| **Kepustakaan** | : | 1. Kreyzig, Erwin, *Advanced Engineering Mathematics*, 8th Edition, John Wiley & Sons Inc.,1999.<br>2. Pipes,L.A, *Applied Mathematic for Engineer and Physicis*, McGraw-Hill,1976 |

Matematika Teknik I

# EVALUASI

## Hard Skill dan Soft Skill

| | |
|---|---|
| TUGAS | : 10% |
| AKTIFITAS | : 5% |
| PRESENTASI | : 20% |
| MID TES | : 25% |
| UJIAN | : 40% |

# Persamaan Diferensial Biasa dan Ordenya

- Persamaan diferensial biasa diartikan sebagai suatu persamaan yang melibatkan turunan pertama atau lebih dari fungsi sembarang y terhadap variabel x.
- Contoh :
  - $y' = \cos x$
  - $y'' + 4y = 0$
  - $x^2 y''' y' + 2e^x y'' = (x^2 + 2) y^2$

$$\boxed{y' = \frac{dy}{dx}}$$

***Orde*** suatu persamaan diferensial ditentukan dari turunan tertinggi yang terdapat dalam persamaan tersebut.

Istilah ***biasa*** membedakan dengan persamaan ***diferensial parsial***

Contoh :

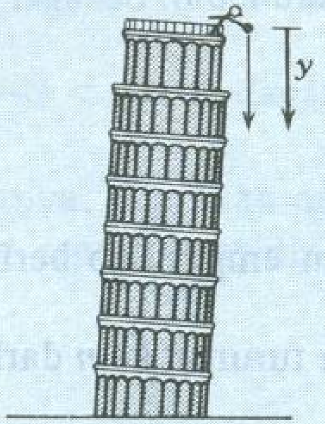
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$ Persamaan Gelombang Dimensi Satu

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$ Persamaan Aliran Panas Dimensi Satu

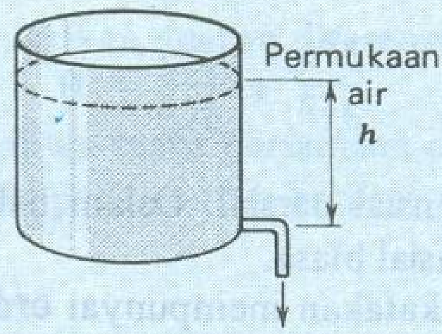
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$ Persamaan Laplace Dimensi Satu

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y)$$ Persamaan Poisson Dimensi Dua

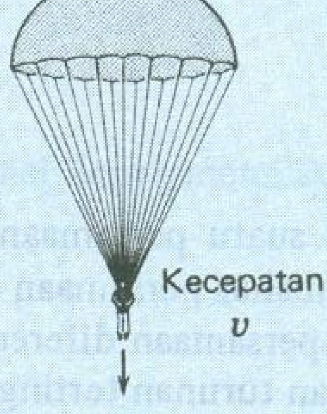
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$ Persamaan Laplace Dimensi Tiga



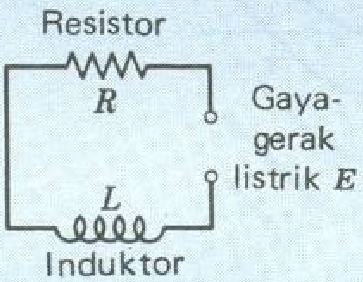

Batu jatuh
$y'' = g =$ konstanta
(Pasal 1.1)



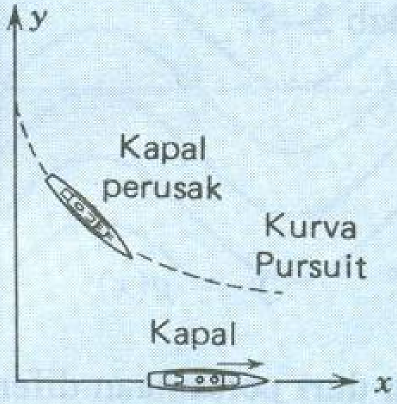

Aliran air
$h' = -k\sqrt{h}$
(Pasal 1.3)



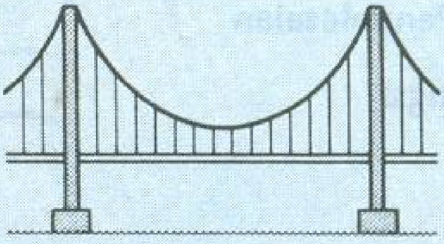

Parasut
$mv' = mg - bv^2$
(Pasal 1.3)



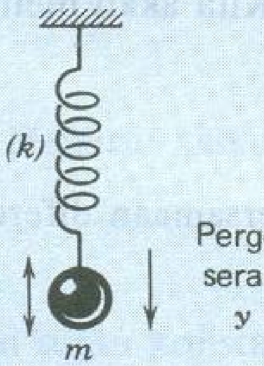

Arus $I$ dalam
rangkaian $- RL$
$LI' + RI = E$
(Pasal 1.8)



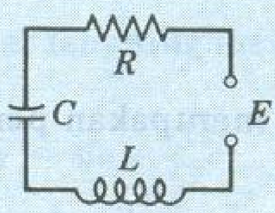

Masalah pengejaran
$y' = y/\sqrt{a^2 - y^2}$
(Pasal 1.10)



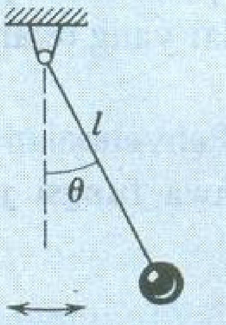
Kabel
jembatan gantung
$y'' = k\sqrt{1 + y'^2}$
(Pasal 2.1)




Massa bergerak
pada suatu pegas
$my'' + ky = 0$
(Pasal 2.6, 2.13, 5.4)




Arus $I$ di dalam
rangkaian $- RLC$
$LI'' + RI' + \frac{1}{C} I = E'$
(Pasal 2.14)




Bandul
$l\theta'' + g \sin \theta - 0$
(Pasal 3.2, 3.3)

# Konsep Penyelesaian

- Suatu fungsi $y = g(x)$ dikatakan suatu penyelesaian persamaan diferensial orde pertama yang diberikan pada interval $a<x<b$, jika $g(x)$ didefinisikan dan dapat dideferensiasikan seluruhnya pada selang tersebut sehingga persamaan tersebut menjadi suatu identitas,jika $y$ dan $y'$ masing-masing digantikan dengan $g$ dan $g'$

Contoh :

Buktikan bahwa fungsi $y = g(x) = x^2$ merupakan penyelesaian persamaan diferensial orde pertama $xy' = 2y$

$$g' = 2x$$

Sekarang subtitusikan $g$ dan $g'$ ke persamaan diferensial

$$x(2x) = 2x^2 \qquad \textit{(terbukti)}$$

# Penyelesaian Implisit

- Kadang-kadang suatu penyelesaian persamaan diferensial muncul sebagai fungsi implisit, yaitu secara implisit diberikan dalam bentuk

$$G(x,y) = 0$$

- Contoh
- Fungsi terhadap x secara implisit diberikan oleh : $x^2 + y^2 - 1 = 0$ merupakan penyelesaian implisit dari persamaan diferensial $yy' = -x$ pada selang $-1 < x < 1$

# Penyelesaian Umum dan Penyelesaian Khusus

- Contoh :

$$y' = \cos x$$

Dengan mengintegralkan maka didapat penyelesaiannya :

$$\boldsymbol{y = \sin x + c} \quad (c = \textit{konstanta sembarang})$$

Bila $\boldsymbol{c = 0}$ maka penyelesaiannya adalah $\boldsymbol{y = \sin x}$

Bila $\boldsymbol{c = 1{,}5}$ maka penyelesaiannya adalah $\boldsymbol{y = \sin x + 1{,}5}$ *dan sebagainya*

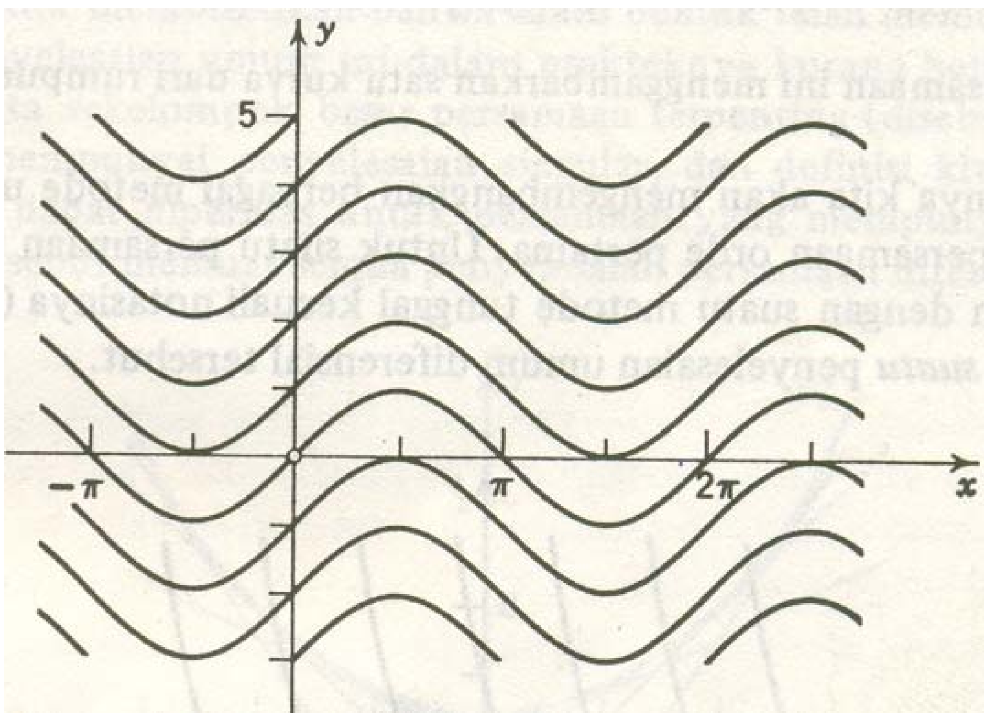
Bila *c* belum diketahui/ditentukan disebut ***Penyelesaian Umum***

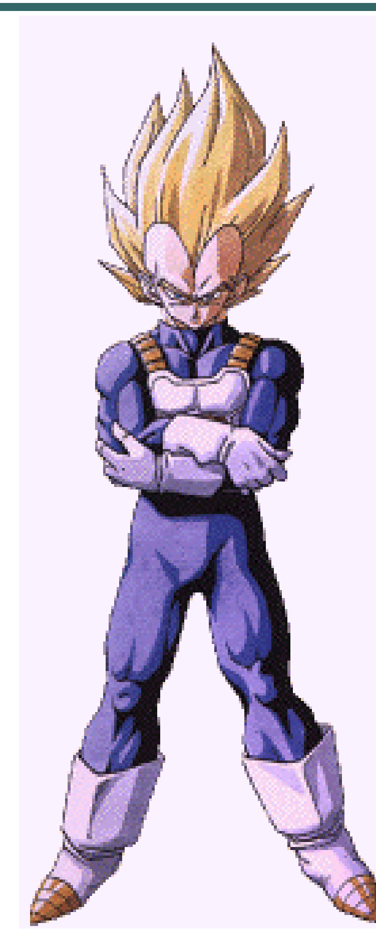
Bila *c* sudah diketahui/ditentukan disebut ***Penyelesaian Khusus***

## Suatu persamaan diferensial orde pertama dapat mempunyai lebih dari satu penyelesaian

- Penyelesaian $y' = \cos x$

  $\boldsymbol{y = \sin x + c}$



# Penyelesaian Singular

- Dalam beberapa kasus terdapat penyelesaian lain dari persamaan yang diberikan oleh penyelesaian tersebut ternyata tidak dapat diperoleh dengan memberikan nilai tertentu pada sembarang konstanta dari penyelesaian umum, penyelesaian yang demikian disebut ***penyelesaian singular*** dari persamaan tersebut.
- Contoh :

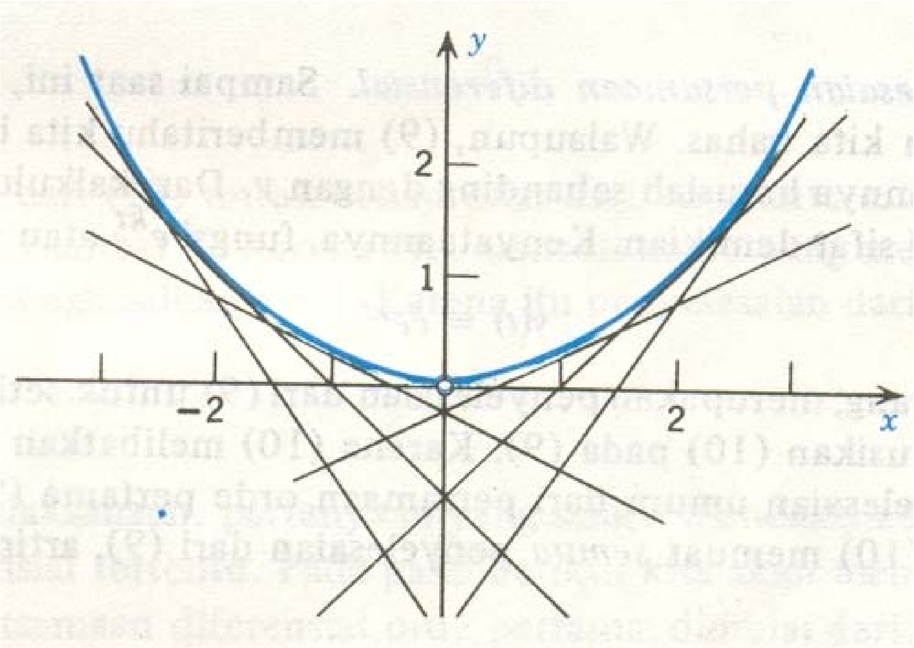
$$y'^2 - xy + y = 0$$

mempunyai penyelesaian umum

$$y = cx - c^2$$

# Penyelesaian singular

- Setiap penyelesaian khusus menggambarkan suatu garis singgung pada parabola yang digambarkan oleh penyelesaian singular



# Persamaan Diferensial Terpisah

- Beberapa persamaan diferensial dapat dirubah ke dalam bentuk :

$$g(y)y' = f(x) \qquad y' = \frac{dy}{dx}$$

$$g(y)dy = f(x)dx$$

***Persaman ini disebut persamaan diferensial terpisah***

Dengan mengintegralkan maka didapat

$$\boxed{\int g(y)dy = \int f(x)dx + c}$$

*Contoh*:

Selesaikan persamaan diferensial

$$y' = -2xy$$

Penyelesaian :

$$\frac{dy}{dx} = -2xy \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{y} = -2x\,dx$$

Dengan integrasi didapat :

$$\ln|y| = -x^2 + c$$

$$|y| = e^{-x^2 + c}$$

$$y = Ae^{-x^2} \qquad A = e^c$$

# Persamaan Diferensial Eksak

- Suatu persamaan diferensial orde pertama berbentuk :

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

- Dikatakan eksak jika ruas kiri persamaan tersebut merupakan diferensial total atau eksak

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy$$

dari suatu fungsi $u(x,y)$

# Syarat Eksak

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = N$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$$

$$Syarat \;\; eksak$$

$$\boxed{\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}}$$

Contoh : $a.\ \ y^2dx + 2xydy = 0$

$b.\ (4x + 3y^2)dx + 2xydy = 0$

Apakah eksak ?

a. $\dfrac{\partial M}{\partial y} = 2y \qquad \dfrac{\partial N}{\partial x} = 2y$

$$\text{Karena } \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}, \quad \text{maka persamaan tersebut eksak}$$

b.

$M = 4x + 3y^2, \qquad N = 2xy$

$\dfrac{\partial M}{\partial y} = 6y^2 \qquad \dfrac{\partial N}{\partial x} = 2y$

$$\text{Karena } \frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}, \quad \text{maka persamaan tersebut tidak eksak}$$