Matrik

- Matrik adalah sekumpulan bilangan riil atau kompleks yang disusun menurut baris dan kolom sehingga membentuk jajaran persegi panjang (array) yang dibatasi oleh tanda kurung siku (atau kurung biasa)

- Matrik yang mempunyai ***m*** baris dan ***n*** kolom disebut matriki ***m x n*** atau matrik berorde ***m x n***

$$\begin{bmatrix} 9 & 4 & 5 \\ 2 & 0 & 8 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

adalah matrik 2 x 3, dengan 9,4,5,2,0,8 merupakan elemennya

Notasi dan Nama Umum Matrik

- Matrik **A** berorde ***m x n***

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

m baris dan
n kolom
a_{mn} = unsur/elemen matrik **A**

- Matrik dilambangkan dengan hurup besar dan dicetak tebal, **A**, **B**, dan sebagainya.
- Untuk matrik baris atau kolom dilambangkan dengan hurup kecil dicetak tebal, misalnya **a, b, x** dan sebagainya**.**

Matrik baris atau vektor baris

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix}$$

Matrik kolom atau vektor kolom

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Kesamaan Matrik

Dua matrik $\mathbf{A} = [a_{jk}]$ dan $\mathbf{B} = [b_{jk}]$ dikatakan sama jika dan hanya jika $\mathbf{A}$ dan $\mathbf{B}$ mempunyai jumlah baris yang sama dan jumlah kolom yang sama dan unsur - unsur yang seletak sama

$$\boxed{a_{jk} = b_{jk}}$$

Contoh :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{jika dan hanya jika} \quad \begin{matrix} a_{11} = 4 & a_{12} = 0 \\ a_{21} = 3 & a_{22} = -1 \end{matrix}$$

Penjumlahan dan Pengurangan Matrik

$$\mathbf{A}+\mathbf{B}=\left(a_{jk}+b_{jk}\right) \text{ dan } \mathbf{A}-\mathbf{B}=\left(a_{jk}-b_{jk}\right)$$

Contoh :

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 5 & -2\\ 3 & 1 & 1\end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad \mathbf{B}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ -1 & 1 & 4\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}+\mathbf{B}=\begin{bmatrix}1 & 5 & -2\\ 3 & 1 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ -1 & 1 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 7 & -2\\ 2 & 2 & 5\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}-\mathbf{B}=\begin{bmatrix}1 & 5 & -2\\ 3 & 1 & 1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ -1 & 1 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 3 & -2\\ 4 & 0 & -3\end{bmatrix}$$

Agar dapat dijumlahkan atau dikurangkan orde harus sama

Sifat-sifat

$\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{B}+\mathbf{A}$ (komutatif)

$(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C}=\mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C})$ (asosiatif)

$\mathbf{A}+\mathbf{0}=\mathbf{A}$

$\mathbf{A}+(-\mathbf{A})=\mathbf{0}$

Perkalian matrik dengan skalar c (bilangan)

$$\mathbf{A} = \left[a_{jk}\right] \qquad c\mathbf{A} = \left[ca_{jk}\right]$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad c = 4$$

$$\Rightarrow 4\mathbf{A} = 4\begin{bmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 20 & -8 \\ 12 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

Perkalian matrik dengan matrik

$$\mathbf{A} = \left[a_{jk}\right] \qquad \mathbf{B} = \left[b_{jk}\right] \qquad \mathbf{C} = \mathbf{AB}$$

$$\boxed{c_{jk} = \sum_{l=1}^{n} a_{jl}b_{lk} = a_{j1}b_{1k} + a_{j2}b_{2k} + \cdots + a_{jn}b_{nk}}$$

Contoh :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 7 & 6 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 8 \\ 5 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 4 & 7 & 6 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 5 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4x8 + 7x5 + 6x9 \\ 2x8 + 3x5 + 1x9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 32 + 35 + 54 \\ 16 + 15 + 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 121 \\ 40 \end{bmatrix}$$

Sifat-Sifat
Perkalian matrik

$$\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$$

$$\mathbf{(cA)B} = \mathbf{c(AB)} = \mathbf{A(cB)}$$

$$\mathbf{A(BC)} = \mathbf{(AB)C}$$

$$\mathbf{(A+B)C} = \mathbf{AC} + \mathbf{AB}$$

$$\mathbf{A(B+C)} = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}$$

Matrik Khusus

Matrik bujur sangkar adalah matrik yang jumlah baris dan kolomnya sama (***m x m***)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 5 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Matrik segitiga bawah

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 6 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Matrik segitiga atas

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matrik Nol

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \text{ dan } \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Matrik diagonal

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matrik Satuan(identitas)

Transpos Matrik

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})^{\mathrm{T}} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}} + \mathbf{B}^{\mathrm{T}}, \quad (\mathbf{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = \mathbf{A} \quad \text{dan} \quad (\mathbf{AB})^{\mathrm{T}} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}$$

Contoh :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & -8 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ -8 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 7 & 5 & -2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{x}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Matrik dengan elemen riil

Matrik Simetri (*symmetric*)

$$\boxed{\mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \mathbf{A}, \quad a_{kj} = a_{jk} \quad (j, k = 1, 2, 3, \cdots, n)}$$

Matrik Tidak Simetri (*skew-symmetric)*

$$\boxed{\mathbf{A}^{\mathrm{T}} = -\mathbf{A}, \qquad a_{kj} = -a_{jk} \qquad (j, k = 1, 2, 3, \cdots, n)}$$

Matrik Ortogonal (*Orthogonal*)

$$\boxed{\mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \mathbf{A}^{-1}}$$

Contoh :

Simetri

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & -2 \\ 5 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

Tidak Simetri

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 9 & -12 \\ -9 & 0 & 20 \\ 12 & -20 & 0 \end{bmatrix}$$

Ortogonal

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

Matrik dengan elemen Kompleks

Jika elemen kompleks dari matrik A diganti dengan masing-masing konjugasinya disebut matrik konjugasi dari A

$$\overline{\mathbf{A}} = \left[\bar{a}_{jk}\right] \quad \Rightarrow \quad \overline{\mathbf{A}}^{\mathbf{T}} = \left[\bar{a}_{kj}\right]$$

$$\bar{a}_{jk} = \text{konjugat kompleks dari } a_{jk}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3+j4 & -j5 \\ -7 & 6-j2 \end{bmatrix} \quad \overline{A} = \begin{bmatrix} 3-j4 & j5 \\ -7 & 6+j2 \end{bmatrix} \quad \overline{\mathbf{A}}^{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} 3-j4 & -7 \\ j5 & 6+j2 \end{bmatrix}$$

$$\text{Hermitian, jika } \overline{\mathbf{A}}^{\mathbf{T}} = \mathbf{A}, \quad \bar{a}_{kj} = a_{jk}$$

$$\text{Anti-Hermitian, jika } \overline{\mathbf{A}}^{\mathbf{T}} = -\mathbf{A}, \quad \bar{a}_{kj} = -a_{jk}$$

$$\text{Satuan, jika } \overline{\mathbf{A}}^{\mathbf{T}} = \mathbf{A}^{-1},$$

Contoh :

Hermitian

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 1-j3 \\ 1+j3 & 7 \end{bmatrix}$$

Anti-Hermitian

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} j3 & 2+j \\ -2+j & -j \end{bmatrix}$$

Satuan

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} j\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & j\dfrac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Determinan

Notasi $\det \mathbf{A}$ atau $|\mathbf{A}|$

$$|\mathbf{A}| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{j+k} a_{jk} M_{jk} \qquad (j = 1, 2, \cdots, \text{ atau } n)$$

$$M_{jk} = \text{minor dari } a_{jk}$$

$$C = (-1)^{j+k} M_{jk} \qquad \text{kofaktor dari } a_{jk}$$

$$(-1)^{j+k} = \begin{matrix} + & - & + & \cdots \\ - & + & - & \cdots \\ + & - & + & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{matrix}$$

Matrik yang determinannya sama dengan nol disebut matrik ***singular*** dan tidak sama dengan nol disebut ***non singular***

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 3 \\ 8 & 4 & 7 \end{bmatrix} \qquad |\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 3 \\ 8 & 4 & 7 \end{vmatrix} = (5)\begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} - (2)\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 8 & 7 \end{vmatrix} + (1)\begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 8 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= (5)(42 - 12) - (2)(0 - 24) + (1)(0 - 48)$$

$$= (5)(30) - (2)(-24) + (1)(-48) = 150 + 48 - 48 = 150$$

Sifat-sifat determinan

1. Harga suatu determinan tidak berubah jika baris diganti menjadi kolom dan kolom menjadi baris

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

2. Jika dua baris atau kolom ditukar tempatnya, tanda determinannya berubah

$$\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

3. Jika ada dua baris atau kolom yang identik, maka harga determinan tersebut sama dengan nol

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_1 \\ a_2 & a_2 \end{vmatrix} = 0$$

Sifat-sifat determinan

4. Jika elemen-elemen salah satu baris atau kolom semua dikalikan dengan faktor yang sama, maka determinannya pun dikalikan dengan faktor tersebut

$$\begin{vmatrix} ka_1 & kb_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

5. Jika elemen-elemen salah satu baris atau kolom semua ditambah atau dikurangi dengan kalipatan elemen-elemen baris atau kolom lain yang bersesuaian, maka harga determinannya tidak berubah

$$\begin{vmatrix} a_1 + kb_1 & b_1 \\ a_2 + kb_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$