

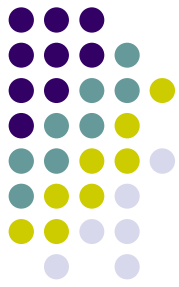
Matrik

- Matrik adalah sekumpulan bilangan riil atau kompleks yang disusun menurut baris dan kolom sehingga membentuk jajaran persegi panjang (array) yang dibatasi oleh tanda kurung siku (atau kurung biasa)
- Matrik yang mempunyai m baris dan n kolom disebut matriki $m \times n$ atau matrik berorde $m \times n$

$$\begin{bmatrix} 9 & 4 & 5 \\ 2 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$



adalah matrik 2×3 , dengan 9,4,5,2,0,8 merupakan elemennya



Notasi dan Nama Umum Matrik

- Matrik **A** berorde $m \times n$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

m baris dan
 n kolom

a_{mn} = unsur/elemen matrik **A**

- Matrik dilambangkan dengan hurup besar dan dicetak tebal, **A**, **B**, dan sebagainya.
- Untuk matrik baris atau kolom dilambangkan dengan hurup kecil dicetak tebal, misalnya **a**, **b**, **x** dan sebagainya.

Matrik baris atau vektor baris

$$\mathbf{a} = [a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_n]$$

Matrik kolom atau vektor kolom

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$



Kesamaan Matrik

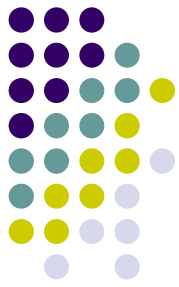
Dua matrik $\mathbf{A} = [a_{jk}]$ dan $\mathbf{B} = [b_{jk}]$ dikatakan sama

jika dan hanya jika \mathbf{A} dan \mathbf{B} mempunyai jumlah baris yang sama dan jumlah kolom yang sama dan unsur - unsur yang seletak sama

$$a_{jk} = b_{jk}$$

Contoh :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{jika dan hanya jika} \quad \begin{array}{ll} a_{11} = 4 & a_{12} = 0 \\ a_{21} = 3 & a_{22} = -1 \end{array}$$



Penjumlahan dan Pengurangan Matrik

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = (a_{jk} + b_{jk}) \quad \text{dan} \quad \mathbf{A} - \mathbf{B} = (a_{jk} - b_{jk})$$

Contoh :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 7 & -2 \\ 2 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 4 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

Agar dapat
dijumlahkan atau
dikurangkan
orde harus sama

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A} \quad (\text{komutatif})$$

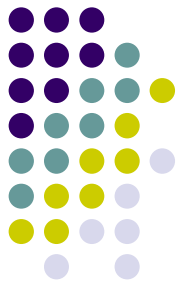
$$(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) \quad (\text{asosiatif})$$

$$\mathbf{A} + \mathbf{0} = \mathbf{A}$$

$$\mathbf{A} + (-\mathbf{A}) = \mathbf{0}$$

Sifat-sifat

Perkalian matrik dengan skalar c (bilangan)



$$\mathbf{A} = [a_{jk}] \quad c\mathbf{A} = [ca_{jk}]$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad c = 4$$

$$\Rightarrow 4\mathbf{A} = 4 \begin{bmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 20 & -8 \\ 12 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

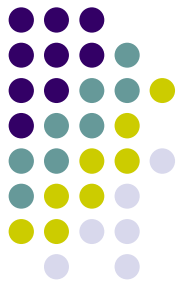
Perkalian matrik dengan matrik

$$\mathbf{A} = [a_{jk}] \quad \mathbf{B} = [b_{jk}] \quad \mathbf{C} = \mathbf{AB}$$

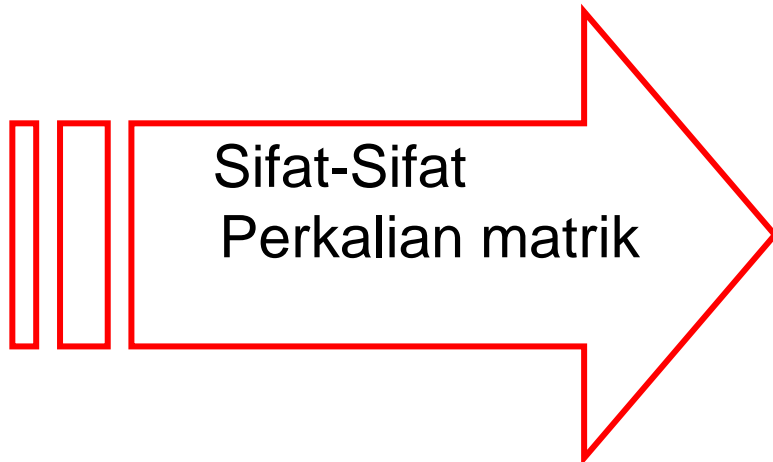
$$c_{jk} = \sum_{l=1}^n a_{jl} b_{lk} = a_{j1} b_{1k} + a_{j2} b_{2k} + \cdots + a_{jn} b_{nk}$$

Contoh :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 7 & 6 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 8 \\ 5 \\ 9 \end{bmatrix}$$



$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 4 & 7 & 6 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 5 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4x8 + 7x5 + 6x9 \\ 2x8 + 3x5 + 1x9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 32 + 35 + 54 \\ 16 + 15 + 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 121 \\ 40 \end{bmatrix}$$



Sifat-Sifat
Perkalian matrik

$$\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$$

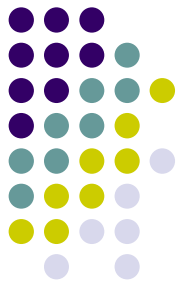
$$(\mathbf{cA})\mathbf{B} = \mathbf{c}(\mathbf{AB}) = \mathbf{A}(\mathbf{cB})$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{BC}) = (\mathbf{AB})\mathbf{C}$$

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{AC} + \mathbf{AB}$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}$$

Matrik Khusus



Matrik bujur sangkar adalah matrik yang jumlah baris dan kolomnya sama ($m \times m$)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 5 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Matrik segitiga bawah

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 6 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Matrik segitiga atas

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matrik Nol

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \text{ dan } \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Matrik diagonal

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matrik Satuan(identitas)

Transpos Matrik



$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T, \quad (\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A} \quad \text{dan} \quad (\mathbf{AB})^T = \mathbf{A}^T \mathbf{B}^T$$

Contoh :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & -8 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ -8 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{x} = [7 \quad 5 \quad -2] \quad \mathbf{x}^T = \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Matrik dengan elemen riil

Matrik Simetri (*symmetric*)

$$\mathbf{A}^T = \mathbf{A}, \quad a_{kj} = a_{jk} \quad (j, k = 1, 2, 3, \dots, n)$$

Matrik Tidak Simetri (*skew-symmetric*)

$$\mathbf{A}^T = -\mathbf{A}, \quad a_{kj} = -a_{jk} \quad (j, k = 1, 2, 3, \dots, n)$$

Matrik Ortogonal (*Orthogonal*)

$$\mathbf{A}^T = \mathbf{A}^{-1}$$

Contoh :

Simetri

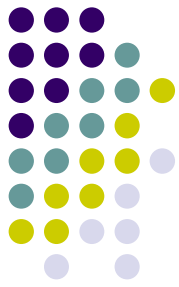
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & -2 \\ 5 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

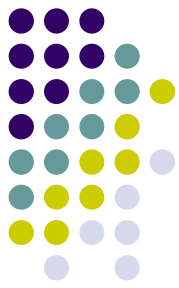
Tidak Simetri

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 9 & -12 \\ -9 & 0 & 20 \\ 12 & -20 & 0 \end{bmatrix}$$

Ortogonal

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$$





Matrik dengan elemen Kompleks

Jika elemen kompleks dari matrik \mathbf{A} diganti dengan masing-masing konjugasinya disebut matrik konjugasi dari \mathbf{A}

$$\overline{\mathbf{A}} = [\overline{a_{jk}}] \quad \rightarrow \quad \overline{\mathbf{A}}^T = [\overline{a_{kj}}]$$

$\overline{a_{jk}}$ = konjugat kompleks dari a_{jk}

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 + j4 & -j5 \\ -7 & 6 - j2 \end{bmatrix} \quad \overline{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 3 - j4 & j5 \\ -7 & 6 + j2 \end{bmatrix} \quad \overline{\mathbf{A}}^T = \begin{bmatrix} 3 - j4 & -7 \\ j5 & 6 + j2 \end{bmatrix}$$

Hermitian, jika $\overline{\mathbf{A}}^T = \mathbf{A}$, $\overline{a_{kj}} = a_{jk}$

Anti - Hermitian, jika $\overline{\mathbf{A}}^T = -\mathbf{A}$, $\overline{a_{kj}} = -a_{jk}$

Satuan, jika $\overline{\mathbf{A}}^T = \mathbf{A}^{-1}$,

Contoh :

Hermitian

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 1 - j3 \\ 1 + j3 & 7 \end{bmatrix}$$

Anti-Hermitian

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} j3 & 2 + j \\ -2 + j & -j \end{bmatrix}$$

Satuan

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} j\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & j\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Determinan



Notasi $\det \mathbf{A}$ atau $|\mathbf{A}|$

$$|\mathbf{A}| = \sum_{k=1}^n (-1)^{j+k} a_{jk} M_{jk} \quad (j = 1, 2, \dots, \text{atau } n)$$

M_{jk} = minor dari a_{jk}

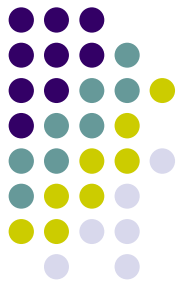
$C = (-1)^{j+k} M_{jk}$ kofaktor dari a_{jk}

	+	-	+	...	
$(-1)^{j+k}$	=	-	+	-	...
		+	-	+	...
		⋮	⋮	⋮	⋮

Matrik yang determinannya sama dengan nol disebut matrik **singular** dan tidak sama dengan nol disebut **non singular**

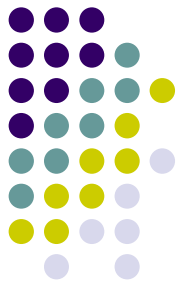
$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 3 \\ 8 & 4 & 7 \end{bmatrix} & |\mathbf{A}| &= \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 3 \\ 8 & 4 & 7 \end{vmatrix} = (5) \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} - (2) \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 8 & 7 \end{vmatrix} + (1) \begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 8 & 4 \end{vmatrix} \\ & & & = (5)(42 - 12) - (2)(0 - 24) + (1)(0 - 48) \\ & & & = (5)(30) - (2)(-24) + (1)(-48) = 150 + 48 - 48 = 150 \end{aligned}$$

Sifat-sifat determinan



1. Harga suatu determinan tidak berubah jika baris diganti menjadi kolom dan kolom menjadi baris
$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$
2. Jika dua baris atau kolom ditukar tempatnya, tanda determinannya berubah
$$\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$
3. Jika ada dua baris atau kolom yang identik, maka harga determinan tersebut sama dengan nol
$$\begin{vmatrix} a_1 & a_1 \\ a_2 & a_2 \end{vmatrix} = 0$$

Sifat-sifat determinan



4. Jika elemen-elemen salah satu baris atau kolom semua dikalikan dengan faktor yang sama, maka determinannya pun dikalikan dengan faktor tersebut

$$\begin{vmatrix} ka_1 & kb_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

5. Jika elemen-elemen salah satu baris atau kolom semua ditambah atau dikurangi dengan kalipatan elemen-elemen baris atau kolom lain yang bersesuaian, maka harga determinannya tidak berubah

$$\begin{vmatrix} a_1 + kb_1 & b_1 \\ a_2 + kb_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$