Persamaan Diferensial Linear Orde Dua

$$f(x)y''+p(x)y'+q(x)y=r(x)$$

-Suatu persamaan diferensial adalah linear, jika koefisiennya konstan atau hanya merupakan fungsi dari variabel bebasnya.

Contoh :

$$xy''+3y'-2xy=\sin x$$ (linear tak homogen)

$$(1-x^2)y''-2xy+6y=0$$ (linear homogen)

$$yy''-x(y')^2+x^2y=e^x$$ (tak linear tak homogen)

Konsep Penyelesaian Prinsip Superposisi

Contoh :

$$y'' + y = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} y &= \cos x \\ y &= \sin x \\ y &= 3\cos x \\ y &= 2\cos x - 8\sin x \end{aligned}$$

Dalam kasus persamaan linear homogen kita dapat memperoleh penyelesaian baru dari beberapa penyelesaian yang diketahui dengan perkalian dan penjumlahan konstanta (***Prinsip Superposisi***).

Kombinasi linear

$$\boxed{y = c_1 y_1 + c_2 y_2 \qquad (c_1,\ \ c_2 \text{ konstanta sembarang})}$$

Persamaan Diferensial Homogen dengan Koefisien Konstan

$$ay''+by'+cy=0$$

a,b dan c konstan

Penyelesaian :

$$y=e^{\lambda x}, \quad y'=\lambda e^{\lambda x}, \qquad y''=\lambda^2 e^{\lambda x}$$

$$\left(a\lambda^2 e^{\lambda x}+b\lambda e^{\lambda x}+ce^{\lambda x}\right)=0$$

$$\left(a\lambda^2+b\lambda+c\right)e^{\lambda x}=0$$

$a\lambda^2+b\lambda+c=0$ Persamaan Karakteristik

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$$

$$\lambda_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad dan \quad \lambda_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Dua akar riil yang berbeda λ_1 dan λ_2

$$P.U. \;\; y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$$

Contoh : $y'' + 3y' + 2y = 0$

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$$

$$\lambda_1 = \frac{-3 + \sqrt{9-8}}{2} = -1 \quad \text{dan} \quad \lambda_2 = \frac{-3 - \sqrt{9-8}}{2} = -2$$

$$P.U. \;\; y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x}$$

Akar Kompleks konjugat λ_1 dan λ_2

$$\lambda_1 = \alpha + j\beta, \quad \lambda_2 = \alpha - j\beta \quad \Rightarrow \alpha = -\frac{b}{2a}, \quad \beta_0 = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$P.U. \quad y = e^{\alpha x}\left(A\cos\beta x + B\sin\beta x\right)$$

Contoh :

$$y'' - 2y' + 10y = 0$$

$$\lambda^2 - 2\lambda + 10 = 0$$

$$\lambda_1 = \frac{2 + \sqrt{4-40}}{2} = 1 + j3 \quad \text{dan} \quad \lambda_2 = \frac{2 - \sqrt{4-40}}{2} = 1 - j3$$

$$P.U. \quad y = e^{x}\left(A\cos 3x + B\sin 3x\right)$$

Dua akar sama $\lambda_1 = \lambda_2$, $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$

$P.U.\ y = (c_1 + c_2 x)e^{\alpha x}$

Contoh : $y'' + 4y' + 4y = 0$

$$\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$$

$$\lambda_1 = \frac{-4 + \sqrt{16-16}}{2} = -2 \quad \text{dan} \quad \lambda_2 = \frac{-4 - \sqrt{16-16}}{2} = -2$$

$P.U.\ y = (c_1 + c_2 x)e^{-2x}$

Operator Diferensial

$$Dy = y', \quad D^2 y = y'', \quad D^3 y = y''', \cdots$$

Contoh : $(D^2 + 4D + 4)y = 0$

Persamaan Diferensial Tak Homogen dengan Koefisien Konstan

$$ay''+by'+cy = r(x) \qquad (1)$$

$$\boxed{P.U.\;\; y = y_h + y_p}$$

y_h = penyelesaian umum homogen

y_p = penyelesaian khusus tak homogen

Tabel 1. Metode Koefisien Taktentu

Bentuk pada *r(x)*	Pilihan untuk y_p
$ke^{\gamma x}$	$Ce^{\gamma x}$
$kx^n (n = 0, 1, \cdots)$	$K_n x^n + K_{n-1}x^{n-1} + \cdots + K_1 x + K_0$
$k\cos\omega x$	$K\cos\omega x + M\sin\omega x$
$k\sin\omega x$	

Aturan untuk Metode Koefisien Taktentu

A. Aturan dasar. Jika *r(x)* dalam persamaan (1) merupakan salah satu fungsi yang terdapat pada kolom pertama dari tabel 1 pilihlah fungsi y_p yang bersesuaian dari kolom kedua dan tentukan koefisien taktentunya dengan cara substitusi dan turunannya kedalam persamaan (1)

B. Aturan Modifikasi. Jika *r(x)* merupakan penyelesaian persamaan homogen dari persamaan (1), maka kalikan y_p yang kita pilih dengan x (atau x^2 jika penyelesaian ini diperuntukan bagi akar kembar persamaan karakterisrtik dari persamaan homogen

C. Aturan Penjumlahan. Jika *r(x)* merupakan penjumlahan fungsi-fungsi yang berasal dari beberapa baris dari kolom pertama pada tabel 1, maka pilihlah y_p yang berupa penjumlahan fungsi-fungsi dari baris yang bersesuaian dalam kolom kedua.

Contoh : $$y''-5y'+6y = 2\sin 4x$$

Homogen $$y''-5y'+6y = 0$$

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$$

$$\lambda_1 = \frac{5+\sqrt{25-24}}{2} = 3 \quad \text{dan} \quad \lambda_2 = \frac{5-\sqrt{25-24}}{2} = 2$$

$$\boxed{y_h = c_1 e^{3x} + c_2 e^{2x}}$$

Tak Homogen
Pilihan untuk y_p

$$y_p = K\cos 4x + M\sin 4x$$

$$y_p' = -4K\sin 4x + 4M\cos 4x$$

$$y_p'' = -16K\cos 4x - 16M\sin 4x$$

Subtitusi y_p

$$y''-5y'+6y = 2\sin 4x$$

$$
\begin{aligned}
(-16K\cos 4x - 16M\sin 4x) &= -16K\cos 4x && -16M\sin 4x \\
-5(-4K\sin 4x + 4M\cos 4x) &= -20M\cos 4x && +20K\sin 4x \\
6(K\cos 4x + M\sin 4x) &= 6K\cos 4x && +\ 6M\sin 4x \quad +
\end{aligned}
$$

$$= (-10K - 20M)\cos 4x + (20K - 10M)\sin 4x$$

Samakan koefisien

$$(-10K - 20M)\cos 4x + (20K - 10M)\sin 4x = 2\sin 4x$$

$$(-10K - 20M) = 0 \qquad (20K - 10M) = 2$$

$$-20K - 40M = 0$$

$$20K - 10M = 2$$

$$-50M = 2$$

$$M = -\frac{2}{50} = -\frac{1}{25} \qquad K = \frac{2}{25}$$

$$y_p = \frac{2}{25}\cos 4x - \frac{1}{25}\sin 4x$$

$$\Rightarrow y = y_h + y_p$$

$$y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{2x} + \frac{2}{25}\cos 4x - \frac{1}{25}\sin 4x$$