



# Eliminasi Gauss

$$x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 3$$

$$2x_1 - x_2 - x_3 = 11$$

$$3x_1 + 2x_2 + x_3 = -5$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 11 \\ -5 \end{bmatrix}$$

Pivot  $\rightarrow$   $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & : & 3 \\ 2 & -1 & -1 & : & 11 \\ 3 & 2 & 1 & : & -5 \end{bmatrix}$

Eliminasi  $\rightarrow$   $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & : & 3 \\ 2 & -1 & -1 & : & 11 \\ 3 & 2 & 1 & : & -5 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} B_2 - 2B_1 \\ B_3 - 3B_1 \end{matrix}}$   $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & : & 3 \\ 0 & -5 & 5 & : & 5 \\ 0 & -4 & 10 & : & -14 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & : & 3 \\ 0 & -5 & 5 & : & 5 \\ 0 & 0 & 6 & : & -18 \end{bmatrix} \xrightarrow{B_3 - \frac{4}{5}B_2}$

Augmented Matrik

# Eliminasi Gauss



$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ -18 \end{bmatrix}$$
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 3 \\ -5x_2 + 5x_3 &= 5 \\ 6x_3 &= -18 \end{aligned}$$

Substitusi mundur (*back substitution*)

$$6x_3 = -18 \longrightarrow x_3 = -3$$

$$-5x_2 + 5x_3 = 5, \quad -5x_2 = 15 + 5 = 20 \longrightarrow x_2 = -4$$

$$x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 3 \quad x_1 - 8 + 9 = 3 \longrightarrow x_1 = 2$$

# Nilai Eigen dan Vektor Eigen



$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$$

$\mathbf{A} = [a_{jk}]$  matrik bujur sangkar  $n \times n$

$\mathbf{x}$  = vektor

$\lambda$  = suatu bilangan

Suatu nilai  $\lambda$  yang memberikan penyelesaian  $\mathbf{x} \neq 0$ , maka  $\lambda$  tersebut dinamakan nilai eigen (nilai karakteristik) dari matrik  $\mathbf{A}$ .

Sedangkan penyelesaian  $\mathbf{x} \neq 0$  tersebut vektor eigen (vektor karakteristik) dari matrik  $\mathbf{A}$  yang berkaitan dengan nilai  $\lambda$ .





- Dengan teorema Cramer sistem persamaan homogen mempunyai penyelesaian tak trivial jika dan hanya jika determinan dari matrik koefisien sama dengan nol

## Persamaan karakteristik

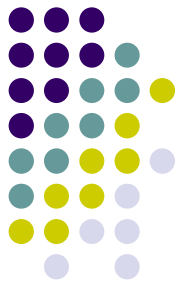
$$D(\lambda) = \det (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \begin{vmatrix} (a_{11} - \lambda) & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & (a_{22} - \lambda) & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & (a_{nn} - \lambda) \end{vmatrix} = 0$$

Nilai eigen dari suatu matrik bujur sangkar  $\mathbf{A}$  adalah akar-akar dari persamaan karakteristik yang berkaitan dengan matrik  $\mathbf{A}$

## Contoh :

Carilah nilai eigen dan vektor eigen dari matrik A

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$



Persamaan karakteristik

$$\begin{vmatrix} (4 - \lambda) & 1 \\ 3 & (2 - \lambda) \end{vmatrix} = 0$$

$$(4 - \lambda)(2 - \lambda) - 3 = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0$$

Nilai Eigen

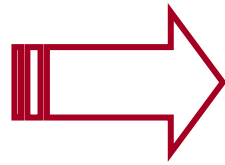
$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 5$$

Vektor eigen untuk  $\lambda_1 = 1$  :

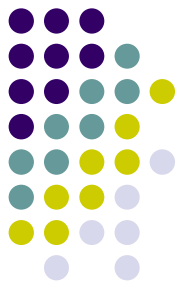
$$\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 1 \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} 4x_1 + x_2 &= x_1 \\ 3x_1 + 2x_2 &= x_2 \end{aligned}$$

$$4x_1 + x_2 = x_1$$

$$3x_1 + 2x_2 = x_2$$



$$x_2 = -3x_1$$



Hal ini menyatakan bahwa berapapun  $x_1$ , nilai  $x_2$  selalu -3 kalinya

- Dengan demikian vektor eigen dalam bentuk umum untuk  $\lambda_1 = 1$  :

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} k \\ -3k \end{bmatrix} \quad \text{untuk } k = 1 \quad \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Vektor eigen untuk  $\lambda_2 = 5$  :

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 5 \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} 4x_1 + x_2 = 5x_1 \\ 3x_1 + 2x_2 = 5x_2 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad x_2 = x_1$$

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} k \\ k \end{bmatrix} \quad \text{untuk } k = 1 \quad \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$