Eliminasi Gauss

$$x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 3$$
$$2x_1 - x_2 - x_3 = 11$$
$$3x_1 + 2x_2 + x_3 = -5$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 11 \\ -5 \end{bmatrix}$$

Pivot

Eliminasi

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & -3 & 3 \\ 2 & -1 & -1 & 11 \\ 3 & 2 & 1 & -5 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{c} \\ B_2 - 2B_1 \\ B_3 - 3B_1 \end{array} \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & -3 & 3 \\ 0 & -5 & 5 & 5 \\ 0 & -4 & 10 & -14 \end{array}\right]$$

Augmented Matrik

$$B_3 - \frac{4}{5}B_2 \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & -3 & 3 \\ 0 & -5 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 6 & -18 \end{array}\right]$$

Eliminasi Gauss

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ -18 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 3 \\ -5x_2 + 5x_3 &= 5 \\ 6x_3 &= -18 \end{aligned}$$

Substitusi mundur (*back substitution*)

$$6x_3 = -18 \longrightarrow x_3 = -3$$

$$-5x_2 + 5x_3 = 5, \qquad -5x_2 = 15 + 5 = 20 \longrightarrow x_2 = -4$$

$$x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 3 \qquad x_1 - 8 + 9 = 3 \longrightarrow x_1 = 2$$

Nilai Eigen dan Vektor Eigen

$$\boxed{\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x}}$$

$$\mathbf{A} = \left[a_{jk}\right] \quad \text{matrik bujur sangkar } n\,x\,n$$

$$\mathbf{x} = \text{vektor}$$

$$\lambda = \text{suatu bilangan}$$

Suatu nilai λ yang memberikan penyelesaian **x** ≠ 0, maka λ tersebut dinamakan nilai eigen (nilai karakteristik) dari matrik **A.**

Sedangkan penyelesaian **x** ≠ 0 desebut vektor eigen (vektor karakteristik) dari matrik **A** yang berkaitan dengan nilai λ.

Penentuan Nilai Egen dan Vektor Eigen

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots a_{1n}x_n = \lambda x_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots a_{2n}x_2 = \lambda x_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots a_{nn}x_n = \lambda x_n \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \cdots a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 + \cdots a_{2n}x_2 = 0 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots (a_{nn} - \lambda)x_n = 0 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} (a_{11} - \lambda) & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & (a_{22} - \lambda) & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & (a_{1nn} - \lambda) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Ax} - \boldsymbol{\lambda}\mathbf{x} = 0 \qquad \text{atau} \qquad (\mathbf{A} - \boldsymbol{\lambda}\mathbf{I})\mathbf{x} = 0$$

- Dengan teorema Cramer sistem persamaan homogen mempunyai penyelesaian tak trivial jika dan hanya jika determinan dari matrik koefisien sama dengan nol

Persamaan karakteristik

$$D(\lambda) = \det\ (\mathbf{A} - \boldsymbol{\lambda}\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} (a_{11} - \lambda) & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & (a_{22} - \lambda) & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & (a_{1nn} - \lambda) \end{vmatrix} = 0$$

Nilai eigen dari suatu matrik bujur sangkar **A** adalah akar-akar dari persamaan karakteristik yang berkaitan dengan matrik **A**

Contoh :

Carilah nilai egen dan vektor eigen dari matrik A

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Persamaan karakteristik

$$\begin{vmatrix} (4-\lambda) & 1 \\ 3 & (2-\lambda) \end{vmatrix} = 0$$

$$(4-\lambda)(2-\lambda) - 3 = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0$$

Nilai Eigen

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 5$$

Vektor eigen untuk $\lambda_1 = 1$:

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 1 \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$4x_1 + x_2 = x_1$$
$$3x_1 + 2x_2 = x_2$$

$$4x_1 + x_2 = x_1$$
$$3x_1 + 2x_2 = x_2$$
$$\Rightarrow \quad x_2 = -3x_1$$

Hal ini menyatakan bahwa berapapun x_1, nilai x_2 selalu -3 kalinya

- Dengan demikian vektor eigen dalam bentuk umum untuk $\lambda_1 = 1$:

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} k \\ -3k \end{bmatrix} \qquad \text{untuk } k = 1 \quad \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Vektor eigen untuk $\lambda_2 = 5$:

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 5 \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$4x_1 + x_2 = 5x_1$$
$$3x_1 + 2x_2 = 5x_2$$
$$\Rightarrow \quad x_2 = x_1$$

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} k \\ k \end{bmatrix} \qquad \text{untuk } k = 1 \quad \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$