



## Kalkulus II

<b>Kode Mata Kuliah</b>	: TE 052017
<b>SKS</b>	: 2
<b>Prasyarat</b>	: Kalkulus I
<b>Tujuan</b>	: Mahasiswa memahami turunan parsial dan integral parsial serta dapat menerapkannya pada masalah-masalah praktis.
<b>Pokok Bahasan</b>	: Turunan parsial, turunan total, Jacobian, garis singgung, bidang singgung, bidang garis normal, baris dan deret, tes konvergensi, geometri analitik ruang, integral lipat dua, integral lipat tiga, dan aplikasinya.
<b>Kepustakaan</b>	: 1. Purcell, E. J., D. Varberg, <i>Kalkulus dan Geometri Analitis</i> , Erlangga, 1995. 2. Anton, H., <i>Kalkulus II</i> , John Wiley, 1995.



# EVALUASI

TUGAS/AKTIFITAS : 20%

MID TES : 40%

UJIAN : 40%

# Fungsi dengan Beberapa Variabel

---

Fungsi dengan Dua Variabel Bebas :

Bila untuk setiap  $(x,y)$  dalam suatu daerah XOY didapat suatu harga  $Z$  yang riil, maka dikatakan bahwa  $Z$  adalah fungsi dari  $x$  dan  $y$  ditulis :

$$Z = f(x,y)$$

$x$  dan  $y$  dinamakan variabel bebas dan  $z$  variabel tak bebas dari fungsi.

# Fungsi dengan Beberapa Variabel



Luas  $L$  suatu lingkaran berjari-jari  $r$  adalah :

$$L = \pi r^2$$

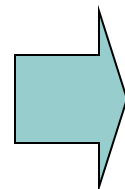
$L$  : variabel tak bebas

$r$  : variabel bebas

$$\frac{dL}{dr} = 2\pi r$$

$$y = f(x)$$

$$y = 20x^2 + 45x + 100$$

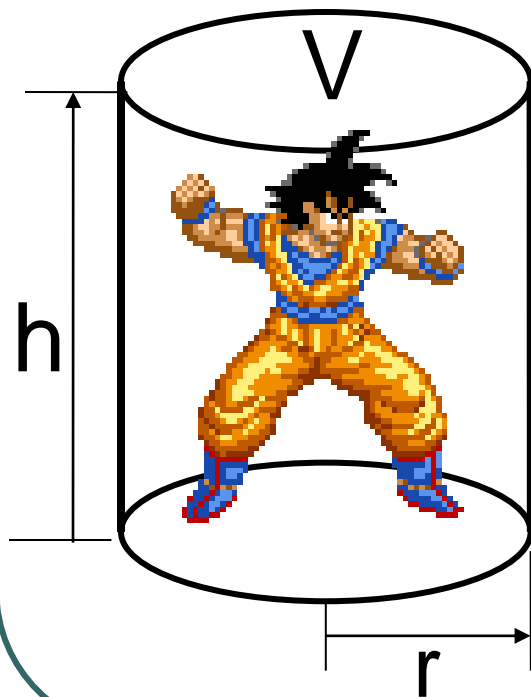


$$\frac{dy}{dx} = 40x + 45$$

# Fungsi dengan Bebarapa Variabel

Volume  $V$  suatu tabung berjari-jari  $r$  dengan ketinggian  $h$  adalah :

$$V = \pi r^2 h$$



yakni  $V$  tergantung dari dua besaran yaitu  $r$  dan  $h$ ,  $V=V(r,h)$   
Jika  $r$  dijaga tetap dan ketinggian  $h$  ditambah, maka volume  $V$  akan bertambah. Hal ini dapat dicari kofisien diferensial  $V$  terhadap  $h$  dengan syarat  $r$  dijaga konstan

# Fungsi dengan Beberapa Variabel

---

yaitu  $\left[ \frac{dV}{dh} \right]_{r \text{ konstan}}$  dan dituliskan sebagai  $\frac{\partial V}{\partial h}$

$\frac{\partial V}{\partial h}$  disebut koefisien turunan Parsial V terhadap h.

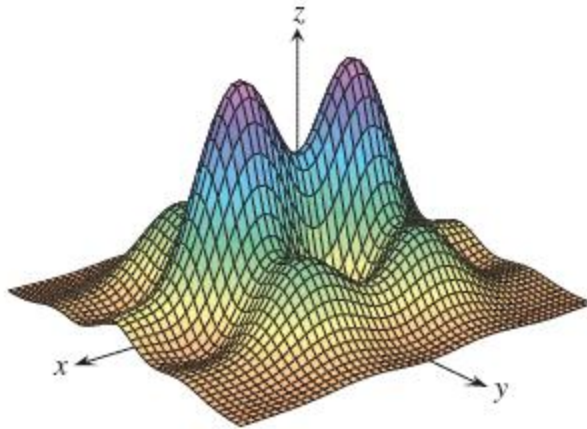
$$\frac{\partial V}{\partial h} = \pi r^2$$

r = konstan

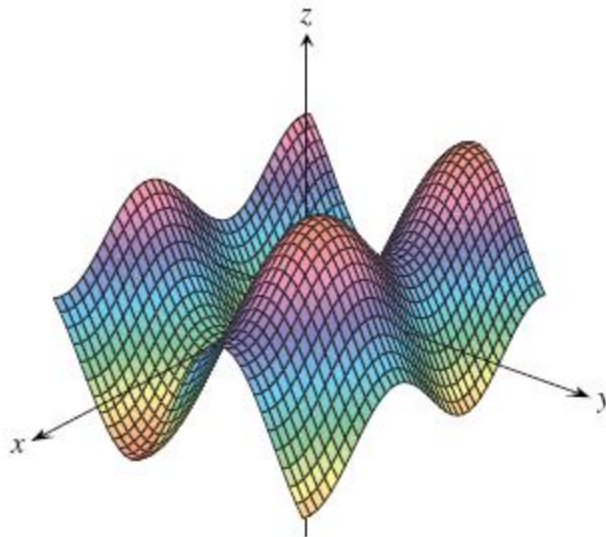
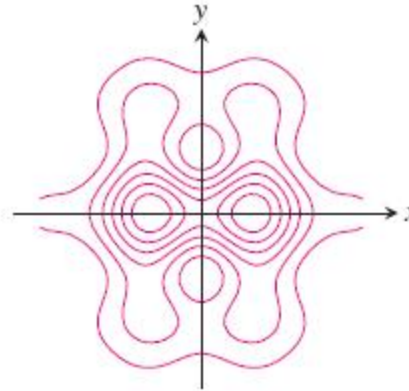
$$\frac{\partial V}{\partial r} = 2\pi rh$$

h = konstan

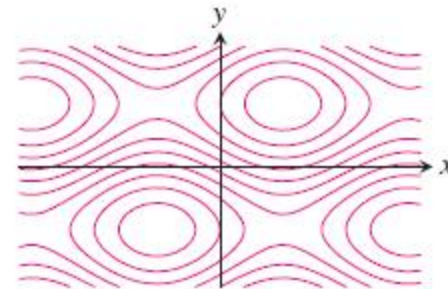
# Contoh gambar fungsi dua variabel dengan computer



(a)  $z = e^{-(x^2 + y^2)/8}(\sin x^2 + \cos y^2)$



(b)  $z = \sin x + 2 \sin y$



# Turunan Parsial

$$z = f(x, y)$$

Jika  $x$  berubah – ubah sedangkan  $y$  tetap,

$z$  adalah fungsi dari  $x$  dan turunannya terhadap  $x$  adalah

$$f_x(x, y) = \frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

disebut turunan parsial pertama dari  $z = f(x, y)$  terhadap  $x$

Jika  $y$  berubah – ubah sedangkan  $x$  tetap,

$z$  adalah fungsi dari  $y$  dan turunannya terhadap  $y$  adalah

$$f_y(x, y) = \frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

disebut turunan parsial pertama dari  $z = f(x, y)$  terhadap  $y$



Contoh :  $z = x^3 + y^3 - 2x^2y$

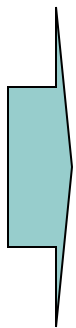
Tentukan  $\frac{\partial z}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial z}{\partial y}$

---

Penyelesaian :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 + 0 - 4xy$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 0 + 3y^2 - 2x^2$$



$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 4xy$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 3y^2 - 2x^2$$



# Fungsi dengan lebih dari dua variabel Bebas

$$f(x, y, z) = xy + 2yz + 3zx$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y + 3z \quad y \text{ dan } z = \text{konstan}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x + 2z \quad x \text{ dan } z = \text{konstan}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 2y + 3x \quad x \text{ dan } y = \text{konstan}$$



# Turunan Parsial Tingkat Dua

---

- Suatu fungsi  $z = z(x,y)$
- Turunan Tingkat Pertama dari  $z$  :

$$\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$$

Turunan Tingkat Dua dari  $z$  :

$$\frac{\partial z}{\partial x} \Rightarrow \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right) &= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \\ \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right) &= \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} \Rightarrow \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right) &= \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right) &= \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}}$$

Contoh :  $z = 3x^2 + 4xy - 5y^2$

Carilah turunan tingkat dua dari z

---

Penyelesaian :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 6x + 4y, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right) = 6, \quad \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right) = 4$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 4x - 10y, \quad \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right) = 4, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right) = -10$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 4}$$