Diferensial Total

Diferensial dx dan dy dari fungsi $y = f(x)$

yang mengandung satu variabel bebas x adalah :

$$dx = \Delta x, \qquad dy = f'(x)dx = \frac{dy}{dx}dx$$

Fungsi $z = f(x, y)$ yang mengandung dua variabel

bebas x dan y didefinisikan, $dx = \Delta x,\ dan\ dy = \Delta y$

Jika x berubah – ubah sedangkan y tetap,

z adalah hanya fungsi dari x dan turunan parsial z terhadap x

adalah : $d_x z = f_x(x, y) = \frac{\partial z}{\partial x} dx$

Diferensial Total

Jika y berubah – ubah sedangkan x tetap,

z adalah hanya fungsi dari y dan turunan parsial z

terhadap y adalah : $d_y z = f_y(x, y) = \dfrac{\partial z}{\partial y} dy$

Jadi **diferensial total** dari z adalah jumlah dari masing-masing diferensial tersebut yaitu :

$$\boxed{dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy}$$

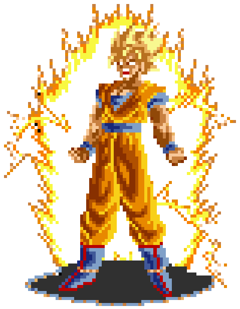
Diferensial Total

Untuk fungsi w = w(x,y,z,…,t) diferensial totalnya adalah :

$$\boxed{dw = \frac{\partial w}{\partial x}dx + \frac{\partial w}{\partial y}dy + \frac{\partial w}{\partial z}dz + \cdots \frac{\partial w}{\partial t}dt}$$

Contoh: $$z = x^3 y + x^2 y^2 + xy^3$$

Penyelesaian :



$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 y + 2xy^2 + y^3$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^3 + 2x^2 y + 3xy^2$$

$$\boxed{dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = \left(3x^2 y + 2xy^2 + y^3\right) dx + \left(x^3 + 2x^2 y + 3xy^2\right) dy}$$

(Diferensial total dari z)

Contoh :

y = 24,97

x = 35,02

Luas = pl atau L = xy

$$L = xy$$

$$dL = \frac{\partial L}{\partial x}dx + \frac{\partial L}{\partial y}dy = ydx + xdy$$

x = 35, dx = 0,02,   y = 25, dy = -0,03

L = 35 x 25 = 875

dL = 25(0,02) + 35(-0,03) = - 0,55

Luas pendekatannya adalah = L + dL = 874,45

Contoh : Jika I=V/R dengan V= 250 volt dan R = 50 ohm. Tentukanlah perubahan I, jika V bertambah sebesar 1 volt dan R bertambah sebesar 0,5 ohm

Penyelesaian :

$$I = f(V, R)$$

$$\frac{\partial I}{\partial V} = \frac{1}{R}, \qquad \frac{\partial I}{\partial R} = -\frac{V}{R^2}$$

$$dI = \frac{\partial I}{\partial V} dV + \frac{\partial I}{\partial R} dR = \frac{1}{R} dV - \frac{V}{R^2} dR$$

$$dV = 1, \qquad dR = 0,5$$

$$dI = \frac{1}{50}(1) + \frac{250}{2500}(0,5) = \frac{1}{50} - \frac{125}{2500} = 0,02 - 0,05 = -0,03$$

Jadi I turun sebesar 0,03 amper

Aturan Rantai

Bila :

$z = f(x,y)$, sedangkan

$x = x(t)$

$y = y(t)$

$z = f(x(t),y(t))$, berarti z fungsi dari t

$$\boxed{\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}}$$

(Total derivatif z terhadap t)

Aturan Rantai

Demikian juga *w = f(x,y,z, . . .)* sedangkan *x,y,z* . . . merupakan fungsi dari t, maka w adalah fungsi dari t :

$$\boxed{\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{dz}{dt} + \cdots}$$

Jika z = f(x,y) sedangkan x =g(r,s) dan y = h(r,s) maka z merupakan fungsi dari r dan s :

$$\boxed{\frac{dz}{dr} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dr} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dr}}$$

dan

$$\boxed{\frac{dz}{ds} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{ds}}$$

Contoh :

$$z = x^2 + 3xy + 5y^2$$

$$x = \sin t, \quad y = \cos t$$

Penyelesaian :

$$\frac{dz}{dx} = 2x + 3y, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 3x + 10y$$

$$\frac{dx}{dt} = \cos t, \quad \frac{dx}{dt} = -\sin t$$

$$\boxed{\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt} = \left(2x + 3y\right)\cos t - \left(3x + 10y\right)\sin t}$$