

Garis Singgung dan Bidang Singgung

- Kurva bidang didefinisikan dengan persamaan

$$x = f(t), \quad y = g(t), \quad z = h(t)$$

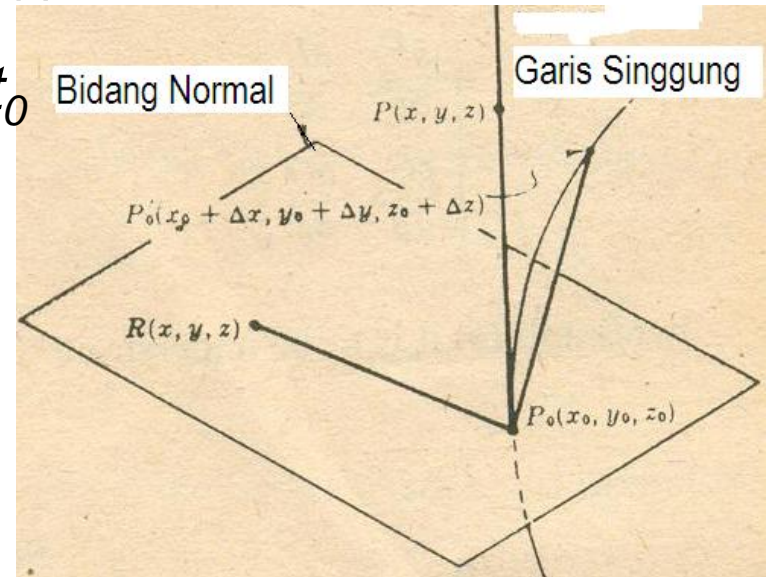
Pada titik $P_0(x_0, y_0, z_0)$, untuk $t = t_0$

Persamaan garis singgung :

$$\frac{x - x_0}{\frac{dx}{dt}} = \frac{y - y_0}{\frac{dy}{dt}} = \frac{z - z_0}{\frac{dz}{dt}}$$

Persamaan bidang normal :

$$\frac{dx}{dt}(x - x_0) + \frac{dy}{dt}(y - y_0) + \frac{dz}{dt}(z - z_0) = 0$$



Carilah persamaan garis singgung dan bidang normal pada kurve

Contoh :

$$x = t, \quad y = t^2, \quad z = t^3 \quad \text{di titik } t = 1$$

Penyelesaian :

Persamaan garis singgung

Pada titik $t = 1$ atau $(1, 1, 1)$ $\frac{dx}{dt} = 1, \frac{dy}{dt} = 2t = 2, \frac{dz}{dt} = 3t^2 = 3$

$$\frac{x - x_0}{\frac{dx}{dt}} = \frac{y - y_0}{\frac{dy}{dt}} = \frac{z - z_0}{\frac{dz}{dt}} = \frac{x - 1}{1} = \frac{y - 1}{2} = \frac{z - 1}{3}$$

Persamaan bidang normal

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt}(x - x_0) + \frac{dy}{dt}(y - y_0) + \frac{dz}{dt}(z - z_0) &= \\ (x - 1) + 2(y - 1) + 3(z - 1) &= x + 2y + 3z - 6 = 0 \end{aligned}$$

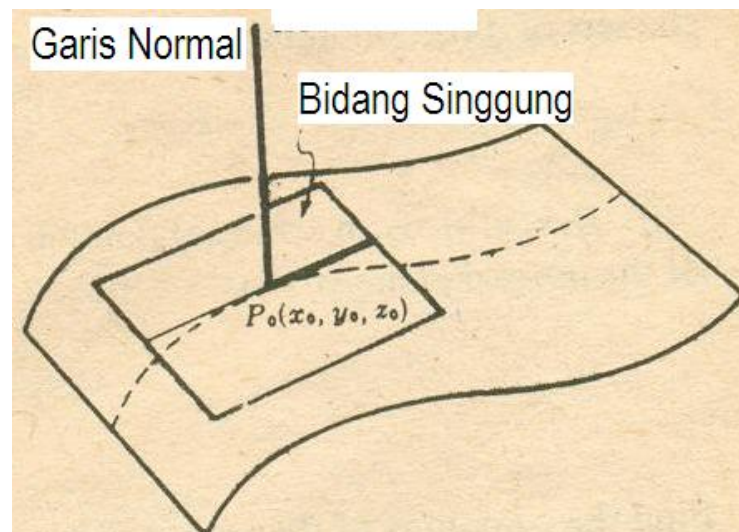
Bidang Singgung dan Garis Normal

Persamaan bidang singgung pada permukaan $F(x,y,z) = 0$ pada titik $P_0(x_0, y_0, z_0)$,

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(y - y_0) + \frac{\partial F}{\partial z}(z - z_0) = 0$$

Persamaan Garis Normal

$$\frac{x - x_0}{\frac{\partial F}{\partial x}} = \frac{y - y_0}{\frac{\partial F}{\partial y}} = \frac{z - z_0}{\frac{\partial F}{\partial z}}$$



$$z = 3x^2 + 2y^2 - 11, (2, 1, 3)$$

Contoh : $F(x, y, z) = 3x^2 + 2y^2 - z - 11 = 0$

Carilah persamaan bidang singgung dan garis normal

Penyelesaian :

Pada titik $(2, 1, 3)$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 6x = 12, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 4y = 4, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = -1$$

Persamaan bidang singgung : $\frac{\partial F}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(y - y_0) + \frac{\partial F}{\partial z}(z - z_0) = 0$

$$12(x - 2) + 4(y - 1) - 1(z - 3) = 12x + 4y - z = 25$$

Persamaan garis normal : $\frac{x - x_0}{\frac{\partial F}{\partial x}} = \frac{y - y_0}{\frac{\partial F}{\partial y}} = \frac{z - z_0}{\frac{\partial F}{\partial z}} = \frac{x - 2}{12} = \frac{y - 1}{4} = \frac{z - 3}{-1}$

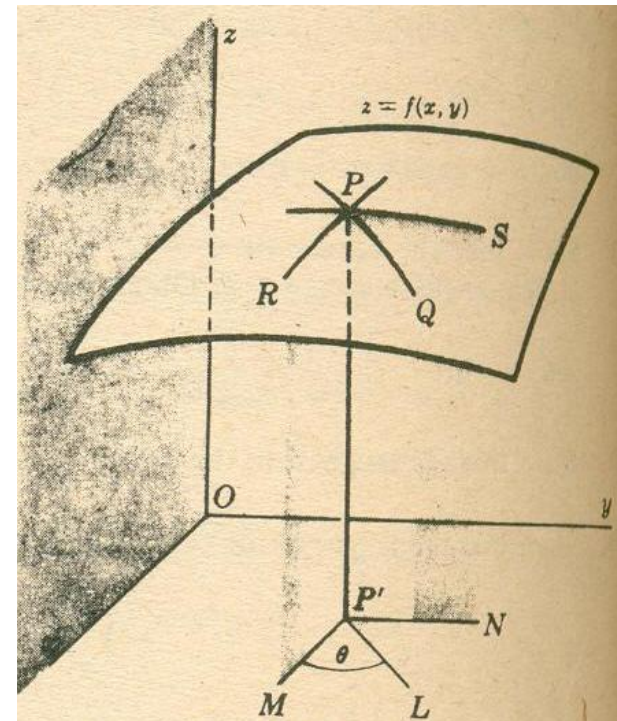
Turunan Arah dan Harga Ekstrim

Turunan Berarah $f(x,y)$ di titik P atau P' dengan arah θ diberikan oleh :

$$\frac{dz}{ds} = \frac{\partial z}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial z}{\partial y} \sin \theta$$

Turunan Berarah untuk fungsi $f(x,y)$ di titik $P(x,y,z)$ dengan arah (α, β, γ) diberikan oleh :

$$\frac{dF}{ds} = \frac{\partial F}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial F}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial F}{\partial z} \cos \gamma$$



Carilah turunan $z = x^2 - 6y^2$

Contoh : pada titik $P'(7,2)$ dengan arah 45°

Penyelesaian :

$$\frac{dz}{ds} = \frac{\partial z}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial z}{\partial y} \sin \theta = 2x \cos \theta - 12y \sin \theta$$

Pada titik $P'(7,2)$ dengan arah $\theta = 45^\circ$

$$\frac{dz}{ds} = 2 \cdot 7 \left(\frac{1}{2} \sqrt{2} \right) - 12 \cdot 2 \left(\frac{1}{2} \sqrt{2} \right) = -5\sqrt{2}$$

Gradien dari Fungsi

Turunan Berarah $f(x,y)$ dalam arah s yang membentuk sudut θ diberikan oleh :

$$\frac{dz}{ds} = \frac{\partial z}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial z}{\partial y} \sin \theta$$

$\frac{dz}{ds}$ adalah fungsi dari arah θ . Arah θ yang

memberikan $\frac{\partial z}{\partial x}$ maksimum dinamakan *gradien dari $f(x, y)$*

Gradien dari Fungsi

- Untuk mendapatkan gradien dari $f(x,y)$ dicari turunan terhadap θ dan menyamakan dengan nol. $\frac{dz}{ds}$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{dz}{ds} \right) = -\frac{\partial z}{\partial x} \sin \theta + \frac{\partial z}{\partial y} \cos \theta = 0$$

$$\tan \theta = \frac{\frac{\partial z}{\partial y}}{\frac{\partial z}{\partial x}} \quad \theta = \text{arc tan} \frac{\frac{\partial z}{\partial y}}{\frac{\partial z}{\partial x}}$$

Arah θ adalah gradien dari $f(x,y)$