

Barisan dan Deret

- Deret dibentuk oleh jumlah suku-suku barisan.

Contoh : barisan 1,3,5,7

$$\text{deret } S=1 + 3 + 5 + 7$$

$$S_n = \sum_{k=1}^n x[k] = x[1] + x[2] + \cdots + x[n]$$

Deret ada dua jenis yaitu :

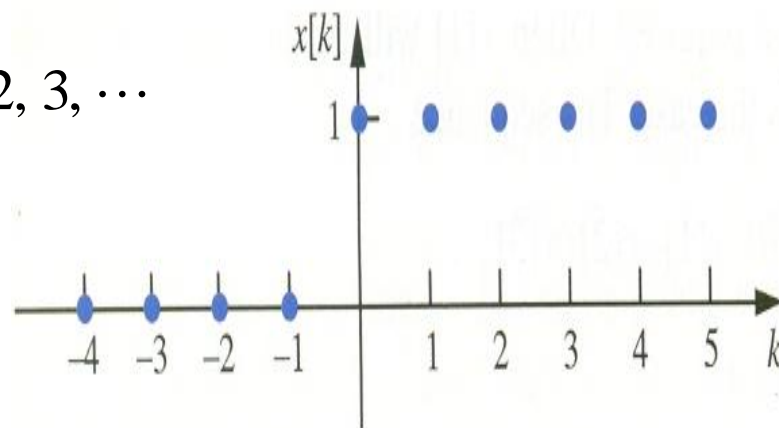
1. Deret hitung (arithmetic series)
2. Deret ukur (geometric series)

Deret berhingga (finite series) adalah barisan yang banyak sukunya berhingga. **Deret tak berhingga (infinite series)** adalah barisan yang tak ada akhirnya.

Penyajian Barisan Dalam Bentuk Grafik

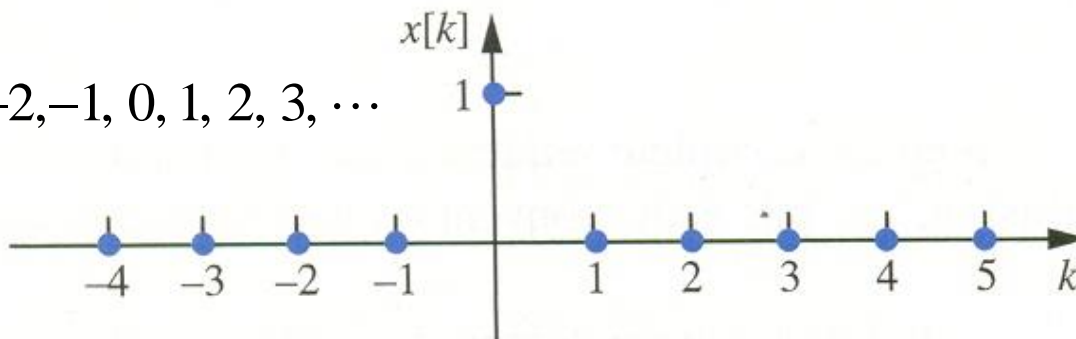
Barisan tanga satuan/ *unit step sequence*

$$x[k] = \begin{cases} 0 & k < 0 \\ 1 & k \geq 0 \end{cases} \quad k = \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$$



Barisan **delta Kronecker**

$$x[k] = \begin{cases} 0 & k = 0 \\ 1 & k \neq 0 \end{cases} \quad k = \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$$



Deret Hitung (aritmatik)

Contoh suatu deret: $2 + 6 + 10 + 14 + \dots$

suku pertama 2, bedanya $(10 - 6) = 4$, untuk suku ke -5 adalah $u_5 = 18$

Deret hitung secara umum dapat dituliskan

$$a + (a + d) + (a + 2d) + (a + 3d) + \dots$$

a = suku pertama, d = beda

$$\text{Suku ke } n = a + (n - 1)d$$

Jadi untuk suku ke -10 dari deret diatas adalah

$$u_{10} = a + (n - 1)d = 2 + (10 - 1)2 = 20$$

Jumlah deret aritmatika

Contoh: Tentukan jumlah 5 suku pertama deret aritmatika $S = 2 + 6 + 10 + 14 + 18$, kalau dihitung jumlahnya adalah 50

Penulisan persamaan S dapat dilakukan dengan dua jalan :

$$S_5 = 2 + 6 + 10 + 14 + 18 \quad \text{dan} \quad S = 18 + 14 + 10 + 6 + 2$$

$$S = 2 + 6 + 10 + 14 + 18$$

$$\frac{S = 18 + 14 + 10 + 6 + 2}{+}$$

$$2S = 20 + 20 + 20 + 20$$

$$2S_5 = 5 \times 20 = 100, \quad S_5 = 50$$

Jumlah deret aritmatika

Jumlah n suku deret aritmatika

$$S_n = a + (a + d) + (a + 2d) + \cdots + (a + (n-1)d)$$

$$S_n = (a + (n-1)d) + (a + (n-2)d) + \cdots + (a + d) + a$$

$$S_n = a + (a + d) + (a + 2d) + \cdots + (a + (n-1)d)$$

$$S_n = (a + (n-1)d) + (a + (n-2)d) + \cdots + (a + d) + a$$

$$2S_n = (2a + (n-1)d) + (2a + (n-1)d) + \cdots + (2a + (n-1)d) +$$

$$2S_n = n(2a + (n-1)d)$$

$$S_n = \frac{n}{2}(2a + (n-1)d)$$

Jadi jumlah n buah suku yang pertama $S_n = \frac{n}{2}(2a + (n-1)d)$

Contoh1: carilah jumlah 30 suku pertama dari deret hitung dengan suku pertama=1 dan beda = 4

$$S_n = 1 + 5 + 9 + \dots, \quad S_n = \frac{n}{2}(2a + (n-1)d),$$

$$S_{30} = \frac{30}{2}(2 + 29 \times 4) = 1770$$

Contoh 2: carilah jumlah deret aritmatika dengan suku pertama 1, beda 3 dan suku terakhir adalah 100

$$\text{Suku ke-}n = a + (n-1)d, \quad \Rightarrow 100 = 1 + (n-1)3,$$

$$3(n-1) = 99, \quad n-1 = 33, \quad n = 34$$

$$S_n = \frac{n}{2}(2a + (n-1)d), \quad S_{34} = \frac{34}{2}(2 + 33 \times 3) = (17)(101) = 1717$$

Deret Ukur (Geometrik)

Deret Geometri (Ukur) adalah suatu deret yang masing - masing sukunya didapat dengan mengalikan suku sebelumnya dengan suatu faktor konstan yang disebut *rasio*

Contoh : $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \dots$

Suku pertama = 1 dan rasio $r = \frac{8}{4} = 2$

Secara umum bentuk deret *geometri* adalah :

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots$$

a = suku pertama, $r = \frac{ar}{a} =$ rasio, Jadi suku ke $n = ar^{n-1}$

Suku ke -10 dari contoh diatas adalah $= ar^{n-1} = 1(2)^9 = 512$

Jumlah Deret Geometri

Contoh: Tentukan jumlah 5 suku pertama deret geometri: $1 + 2 + 4 + 8 + 16$.

Kalau dihitung jumlahnya $a = 31$

$$S_5 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 \quad \text{kalikan dengan rasio} = 2$$

$$2S_5 = 2 + 4 + 8 + 16 + 32$$

Kurangkan

$$S_5 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16$$

$$2S_5 = 2 + 4 + 8 + 16 + 32$$

$$S_5 - 2S_5 = 1 - 32$$

$$S_5 = 31$$

Jumlah Deret Geometri

$$S_n = a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^{n-1}$$

Kalikan dengan *rasio* r

$$rS_n = ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^{n-1} + ar^n$$

Kurangkan

$$S_n = a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^{n-1}$$

$$rS_n = ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^{n-1} + ar^n$$

$$S_n - rS_n = a - ar^n$$

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r} \quad (\text{Jumlah } n \text{ buah suku yang pertama, syarat } r \neq 1)$$

Contoh 1: $8 + 4 + 2 + 1 + \frac{1}{2} + \dots$ tentukan jumlah 8 suku pertama

$$a = 1 \quad r = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

$$S_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r} = \frac{8(1 - (\frac{1}{2})^8)}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{8(1 - (\frac{1}{256}))}{\frac{1}{2}} = 16\left(\frac{255}{256}\right) = \frac{255}{16}$$

Contoh 2:

Suku ke - 6 deret geometri 1215 dan suku ketiga 45.

Tentukan jumlah enam suku pertama.

$$u_n = ar^{n-1}, \quad u_6 = ar^5 = 1215, \quad u_3 = ar^2 = 45$$

$$\frac{ar^5}{ar^2} = r^3 = \frac{1215}{45} = 27, \quad r = 3, \quad u_3 = ar^2 = a(3)^2 = 9a = 45, \quad a = 5$$

$$S_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}, \quad S_6 = \frac{5(1 - 3^6)}{1 - 3} = \frac{5(-729)}{-2} = 1820$$