Deret Binomial

$$(\mathrm{a}+\mathrm{b})^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(\mathrm{a}+\mathrm{b})^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(\mathrm{a}+\mathrm{b})^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

Teorema Binomial (n = bilangan positif)

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}b^3 + \cdots + b^n$$

Misal a = 1 dan b = x

$$(1+x)^n = a^n + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \cdots \qquad -1 < x < 1$$

Segitiga Pascal

$$(a+b)^1 = \quad 1 \quad 1$$

$$(a+b)^2 = \quad 1 \quad 2 \quad 1$$

$$(a+b)^3 = \quad 1 \quad 3 \quad 3 \quad 1$$

$$+$$

$$(a+b)^4 = \quad 1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1$$

$$(a+b)^5 = \quad 1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1$$

$$\boxed{(a+b)^5 = 1a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + 1b^5}$$

Deret Konvergen dan Divergen

- Deret yang jumlah *n* sukunya (S_n) menuju kesebuah harga tertentu jika $n \rightarrow$: disebut deret ***konvergen***.Jika S_n tidak menuju kesebuah harga tertentu ketika $n \rightarrow$: disebut deret ***divergen***

$$\text{Tinjaulah deret ukur : } 1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\frac{1}{81}+\cdots \text{ konvergen atau divergen}$$

$$S_n = \frac{a\left(1-r^n\right)}{1-r} \quad , a=1, \quad r=\frac{1}{3} \qquad S_n = \frac{1\left(1-\left(\tfrac{1}{3}\right)^n\right)}{1-\tfrac{1}{3}} = \frac{1-\dfrac{1}{3^n}}{\dfrac{2}{3}} = \frac{2}{3}\left(1 - \frac{1}{3^n}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{3}\left(1 - \frac{1}{3^n}\right) = \frac{2}{3} \qquad (\text{konvergen})$$

Deret Konvergen dan Divergen

Tinjaulah deret ukur : $1+3+9+27+81+\cdots$ konvergen atau divergen

$$S_n = \frac{a\left(1-r^n\right)}{1-r} \quad , a=1, \quad r=3 \qquad S_n = \frac{1\left(1-3^n\right)}{1-3} = \frac{1-3^n}{-2} = \frac{3^n-1}{2}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{3^n-1}{2} = \infty \qquad \text{(divergen)}$$

Tinjaulah deret ukur : $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots$ konvergen atau divergen

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots \qquad u_n = 0 \text{ untuk } n \to \infty$$

(belum bisa dipastikan konvergen atau divergen harus diuji lebih lanjut)

Kaidah Uji Konvergen dan Divergen Suatu Deret

Uji I. $\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0$ divergen,

$\lim_{n\to\infty} u_n = 0$ mungkin konvergen, harus diuji lebih lanjut

Contoh:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots \quad \text{diuji } \lim_{n\to\infty} u_n = 0$$

$$1+\frac{1}{2}+\left\{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right\}+\left\{\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right\}+\cdots$$

$$\left\{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right\}>\left\{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right\}>\frac{1}{2} \text{ dan } \left\{\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right\}>\left\{\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right\}>\frac{1}{2} \text{ dst.}$$

$$S_n > 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots, \qquad S_n = \infty$$

S_n tidak memberikan harga tertentu maka deretnya divergen

Uji Konvergen dan Divergen Suatu Deret

- **2. Uji Perbandingan (*the comparison test*)**
- Suatu deret dengan suku-suku positif akan konvergen jika suku-sukunya lebih kecil daripada suku-suku seletak deret positif lain.Serupa dengan itu deret tersebut akan divergen jika suku-sukunya lebih besar daripada suku-suku seletak deret lain yang telah diketahui divergen.

Deret Pembanding

$$\frac{1}{1^p}+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\frac{1}{4^p}+\frac{1}{5^p}+\cdots+\frac{1}{n^p}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$$

(i). Jika $p>1$ konvergen

(ii). Jika $p\le 1$ divergen

Uji Konvergen dan Divergen Suatu Deret

Contoh: Untuk menguji kekonvergenan deret

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^4}+\frac{1}{5^5}+\frac{1}{6^6}+\cdots+\frac{1}{n^n}+\cdots \text{ dibandingkan dengan deret}$$

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^5}+\frac{1}{2^6}+\cdots \text{ dibandingkan dengan suku seletak}$$

$$\frac{1}{3^3}<\frac{1}{2^3};\quad \frac{1}{4^4}<\frac{1}{2^4};\quad \frac{1}{5^5}<\frac{1}{2^5} \quad \text{dan seterusnya}$$

Terlihat setelah lewat dua suku pertama suku - suku deret pertama selalu lebih kecil dari pada suku - suku seletak deret lain yang konvergen, jadi deretnya konvergen.

Uji Konvergen dan Divergen Suatu Deret

Uji Pembagian (*The Ratio Test*)

misalkan $u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots$ adalah deret dengan suku – suku positif

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1 \text{ deretnya konvergen}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1 \text{ deretnya divergen}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 \text{ deretnya mungkin konvergen atau divergen}$$

Contoh. Ujilah deret $\frac{1}{1}+\frac{3}{2}+\frac{5}{2^2}+\frac{7}{2^3}+\cdots$

$$u_n=\frac{2n-1}{2^{n-1}},\qquad u_{n+1}=\frac{2(n+1)-1}{2^{(n+1)-1}}=\frac{2n+1}{2^n}$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\left(\frac{2n+1}{2^n}\right)\left(\frac{2^{n-1}}{2n-1}\right)=\left(\frac{2^{n-1}}{2^n}\right)\left(\frac{2n+1}{2n-1}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{2n+1}{2n-1}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{2n+1}{2n-1}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{2+1/n}{2-1/n}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{2+0}{2-0}\right)=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}<1;\quad \text{Jadi deretnya konvergen}$$

Contoh. Ujilah deret $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{4}{5}+\frac{5}{6}+\cdots$

$$u_n=\frac{n}{n+1},\quad u_{n+1}=\frac{n+1}{(n+1)+1}=\frac{n+1}{n+2}$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\left(\frac{n+1}{n+2}\right)\left(\frac{n+1}{n}\right)=\frac{n^2+2n+1}{n^2+2n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2n+1}{n^2+2n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+2/n+2/n^2}{1+2/n}=\frac{1+0+0}{1+0}=1$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=1;\quad \text{Tidak memberikan kesimpulan apa-apa,}$$

deretnya mungkin konvergen atau divergen deretnya harus diuji lagi.

$$\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty n}\frac{n}{n+1}=\lim_{n\to\infty n}\frac{1}{1+1/n}=\frac{1}{1+0}=1;\quad \text{Jadi deretnya divergen}$$

Konvergen Mutlak (Absolutely Convergent)

Suatu deret yang suku – sukunya positif dan negatif (Alternating Series)

$$\textit{Deret}\ :\ 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+ \qquad (\text{konvergen})$$

$$\textit{Deret}\ :\ 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+ \qquad (\text{divergen})$$

Jadi jika $\sum u_n = 1-3+5-7+9+\cdots$

maka $\sum |u_n| = 1+3+5+7+9+\cdots$

Jika $\sum |u_n|$ konvergen maka deret $\sum u_n$ dikatakan konvergen mutlak

Jika $\sum |u_n|$ divergen tetapi $\sum u_n$ konvergen, maka $\sum u_n$ dikatakan konvergen bersyarat

Contoh : Tentukanlah daerah harga x dimana deret berikut konvergen mutlak $\frac{x}{2.5} - \frac{x^2}{3.5^2} + \frac{x^3}{3.5^3} - \frac{x^4}{3.5^4} + \frac{x^5}{3.5^5} - \cdots$

Penyelesaian :

$$|u_n| = \frac{x^n}{(n+1)5^n}; \quad |u_{n+1}| = \frac{x^{n+1}}{(n+1)5^{n+1}}$$

$$\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \frac{x^{n+1}}{(n+1)5^{n+1}} \frac{(n+1)5^n}{x^n} = \frac{x(n+1)}{5(n+2)} = \frac{x(1+1/n)}{5(1+2/n)}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \frac{x}{5}, \text{ supaya konvergen mutlak maka } \lim_{n\to\infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} < 1$$

$$\text{Deret tersebut konvergen mutlak jika } \left|\frac{x}{5}\right| < 1, \text{ yaitu } |x| < 5$$