Deret Pangkat (Power Series)

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_m (x - x_0)^n = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots$$

$di\ mana\ a_0,\ a_1,\ a_2, \cdots$ konstanta deret

x_0 suatu konstanta yang disebut pusat deret dan

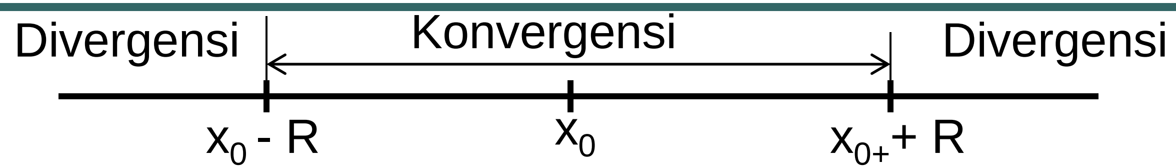
x adalah variabel

Untuk $x_0 = 0$ diperoleh suatu deret pangkat

dalam pangkat – pangkat dari x

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_m x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$$

Interval Konvergensi



Secara umum deret pangkat konvergen untuk $|x| < R$ dan divergen untuk $|x| > R$. R disebut jari – jari konvergensi.

Untuk $|x| = R$ deret mungkin atau tidak konvergen.

Interval $|x| < R$ atau $-R < x < R$ disebut interval konvergensi deret.

Untuk mencari interval gunakan test pembagian (Ratio Test)

$$\text{Jari – jari konvergensi } R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right|}$$

Contoh :

Carilah interval konvergensi dari deret $= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2 \cdot 3^n}$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2 \cdot 3^{n+1}} \cdot \frac{n^2 \cdot 3^n}{x^n}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{3(n+1)^2}|x| = \frac{|x|}{3}$$

deret konvergen untuk $|x| < 3$, dan

pada $x = \pm 3$ deret juga konvergen

sehingga interval konvergensinya adalah $-3 \le x \le 3$

Operasi Deret Pangkat

- Diferensiasi suku demi suku

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$$

$$y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots$$

- Penjumlahan suku demi suku

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad \text{dan} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^n = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + \cdots$$

Operasi Deret Pangkat

- Perkalian suku demi suku

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad \text{dan} \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cdot b_n) x^n = (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0) x^n$$

$$= a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) x + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) x^2 + \cdots$$

Contoh Deret Pangkat

1. $\sin x \quad = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots \quad -\infty < x < \infty$

2. $\cos x \quad = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!} + \cdots \quad -\infty < x < \infty$

3. $e^x \quad = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \cdots \quad -\infty < x < \infty$

4. $\ln|1+x| \quad = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \cdots \quad -1 < x \leqq 1$

5. $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| \quad = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \cdots + \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \cdots \quad -1 < x < 1$

6. $\tan^{-1} x \quad = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \cdots \quad -1 \leqq x \leqq 1$

7. $(1+x)^p \quad = 1 + px + \frac{p(p-1)}{2!} x^2 + \cdots + \frac{p(p-1)\ldots(p-n+1)}{n!} x^n + \cdots$

Polinomial Taylor, Deret Taylor dan Deret Maclaurin

Polynomial Taylor

Polynomial Taylor tingkat pertama dan kedua pada $x = a$

$$P_1(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$$

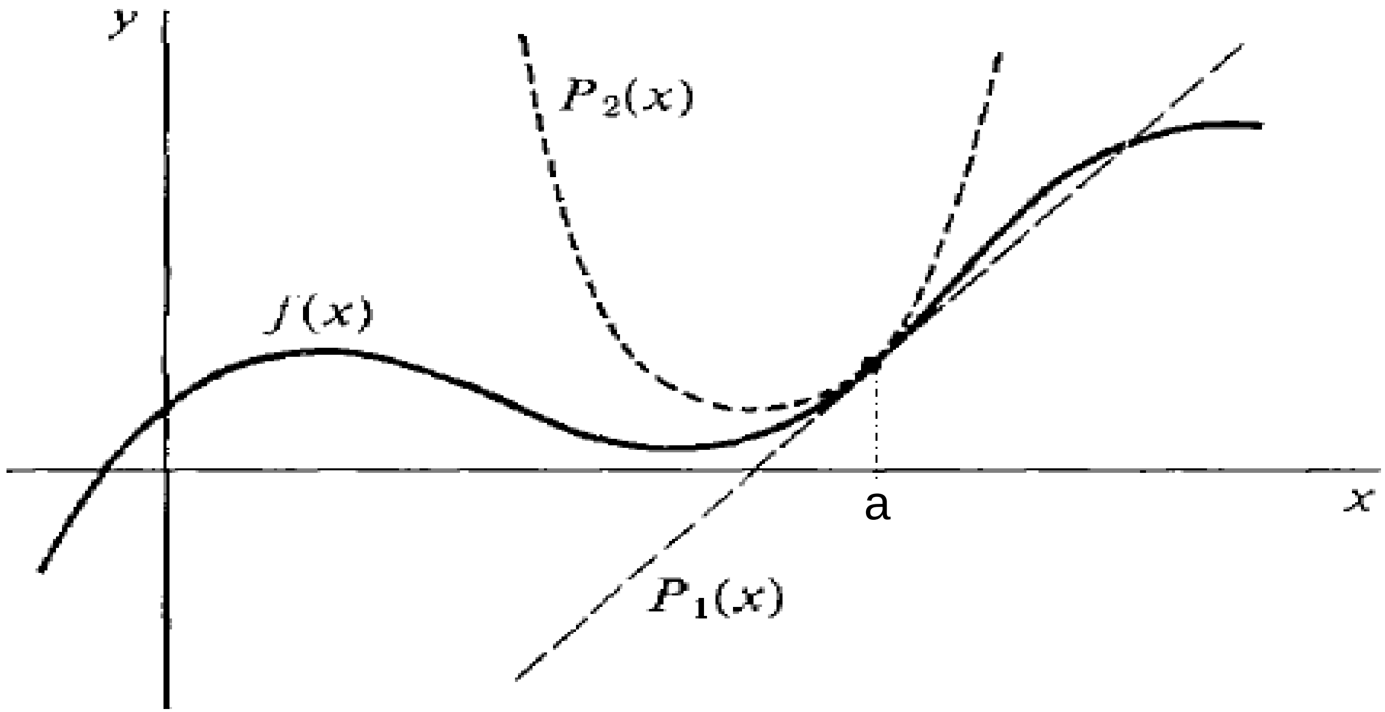
$$P_2(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + f''(a)\frac{(x-a)^2}{2}$$

Polynomial Taylor tingkat n pada $x = a$

$$P_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + f''(a)\frac{(x-a)^2}{2!} + f^{(3)}(a)\frac{(x-a)^3}{3!}$$

$$+ \cdots + f^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{n!}$$

Gambar Polynomial Tingkat Satu dan Dua *$P_1(x)$* dan *$P_2(x)$*



Teorema Taylor (Formula Taylor)

Teorema Taylor

Fungsi f dan turunannya $f', f'', \cdots, f^{(n)}$ ada dan kontinyu dalam interval tertutup $a \le x \le b$ dan $f^{(n+1)}$ ada dalam interval terbuka $a < x < b$.

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x)$$

$R_n(x) =$ Remainder tingkat n atau *Error*

$$\text{Remainder tingkat } n = R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

untuk nilai c diantara a dan x

Deret Taylor

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots$$

$$+ \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{(n-1)} + \cdots$$

untuk $x = a + h$

$$f(a+h) = f(a) + \frac{h}{1!}f'(a) + \frac{h^2}{2!}f''(a) + \frac{h^3}{3!}f'''(a) + \cdots$$

$$+ \frac{h^{(n-1)}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a) + \cdots$$

Deret Maclaurin

Untuk a = 0 deret Taylor disebut deret ***Maclaurin***

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{(n-1)} + \cdots$$

Contoh : Carilah deret Maclaurin $f(x) = e^x$

$$f(x) = e^x \qquad f(0) = e^0 = 1$$

$$f'(x) = e^x \qquad f'(0) = e^0 = 1$$

$$f''(x) = e^x \qquad f''(0) = e^0 = 1$$

$$f'''(x) = e^x \qquad f'''(0) = e^0 = 1$$

$$f(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

Polynomial Taylor Dua Variabel Bebas

Polinomial Taylor Dua Variabel tingkat pertama dan kedua

f adalah fungsi dengan dua variabel bebas, dan nilai f, $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, dan $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ diketahui

pada titik $x = a,\ y = b$, kemudian diketahui $f(a,b)$ $\quad \dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b) \quad \dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b)$

$$P_1(x,y) = f(a,b) + (x-a)\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) + (y-b)\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$$

$$P_2(x,y) = f(a,b) + (x-a)\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) + (y-b)\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) +$$

$$\frac{1}{2!}\left((x-a)^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) + 2(x-a)(y-b)\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) + (y-b)^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)\right)$$